UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE SINOP
INSTITUTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, HUMANAS E SOCIAIS
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática – PPGECM

STELA MARIS FERRARI STREIT

OS EFEITOS DO MODELO DE BARRAS NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

SINOP-MT
2022

STELA MARIS FERRARI STREIT

OS EFEITOS DO MODELO DE BARRAS NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática – PPGECM - da Universidade Federal de Mato Grosso - Campus Universitário de Sinop, como requisito para obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática. Linha de Pesquisa: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edson Pereira Barbosa

Sinop-MT
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S915e Streit, Stela Maris Ferrari.
Os efeitos do modelo de barras nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos / Stela Maris Ferrari Streit. -- 2022
289 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Edson Pereira Barbosa.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Naturais, Humanas e Sociais, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática, Sinop. 2022.
Inclui bibliografia.

1. Ensino de Matemática. 2. Formação de Professores. 3. Modelo de Barras. 4. Modelo dos Campos Semânticos. 5. Resolução de Problemas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: "Efeitos do Modelo De Barras nos Processos de Ensino e de Aprendizagem de Resolução de Problemas Matemáticos"

AUTOR (A): Mestranda Stela Maris Ferrari Streit

Dissertação defendida e aprovada em 06/04/2022.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Presidente Banca / Orientador Doutor(a) Edson Pereira Barbosa

Instituição : UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

2. Examinador Interno Doutor(a) Elizabeth Quirino de Azevedo

Instituição : UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

3. Examinador Externo Doutor(a) Regina Ehlers Bathelt

Instituição : Universidade Federal de Santa Maria - UFSM

4. Examinador Suplente Doutor(a) ANDREIA CRISTINA RODRIGUES TREVISAN

Instituição : UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

SINOP, 06/04/2022.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida e saúde, sem os quais não seria possível sequer começar esta caminhada.

À Professora Drª Rosane Salete Freytag (*in memoriam*), a qual foi propulsora da minha caminhada. No mestrado, seu incentivo, dias de estudo, a credibilidade à minha pessoa e sua virtude generosa, que serviram de alicerce para me tornar uma professora melhor, sinto saudade, alegria por ter alcançado esse objetivo e tristeza por ela não estar aqui hoje e dizer o quanto sou grata.

À minha família, especialmente aos meus pais, Adelmo e Lizelena, pela compreensão nos momentos de ausência e pelo incentivo, tão importante nos momentos de cansaço e aflições. Aos meus irmãos Laura e Igor.

Ao amigo Alan Brasil Pietrobon Magalhães, agradeço o apoio e motivação incondicional que ajudou a tornar este trabalho uma válida e agradável experiência de aprendizagem e, principalmente, pela preocupação e apoio constantes.

Ao orientador, Professor Dr. Edson Pereira Barbosa, que caminhou ao meu lado nesta jornada ímpar, partilhando seus conhecimentos, aconselhando nos dias tensos e orientando de forma genuína. Agradeço à sua generosidade por ter me ensinado a construir conhecimento com empatia.

Aos professores de Matemática da Rede Municipal e Estadual de Educação em Sinop, que gentilmente aceitaram participar da pesquisa, apesar de suas rotinas reconhecidamente cansativas e agitadas.

Aos professores do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso, pelo compartilhamento nobre do conhecimento, das experiências, essenciais nesta etapa de formação profissional.

Às/Aos colegas do PPGECM, turmas 2019/1 e 2020/1 obrigada pela amizade, pela atenção e por serem tão solícitos.

Às Professoras da banca de defesa, Dra. Elizabeth, Dra. Regina e Dra. Andreia, pela leitura atenta e pelas contribuições para o desenvolvimento deste trabalho.

A todos que direta e indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho e permitiram o enriquecimento da minha aprendizagem. Gratidão a todos!

"Não existe ensinar sem aprender e com isto eu quero dizer mais do que iria se dissesse que o ato de ensinar exige a existência de quem ensina e de quem aprende."

(Paulo Freire)

RESUMO

A resolução de problemas é um recurso metodológico ainda pouco aplicado pelos professores que ensinam Matemática na Educação Básica. Os resultados de quem o aplica ainda não tem sido satisfatório em avaliações de larga escala. Dentre as estratégias pedagógicas para ensinar a resolver problemas o Modelo de Barras – recurso amplamente utilizado em Singapura e pouco conhecido no Brasil – tem chamado a atenção de gestores educacionais e pesquisadores, porque os países que o adotaram obtiveram progresso nas últimas avaliações do Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (PISA). Este trabalho objetiva compreender e avaliar, a partir da visão de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, possíveis efeitos da adoção do Modelo de Barras nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos, no segundo ciclo do Ensino Fundamental em Sinop (MT). Para isso, adotando a pesquisa qualitativa, buscou-se uma postura didática e analítica, na perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) de Lins (1999, 2001, 2004, 2012), desenvolvemos um produto educacional composto por uma coletânea de problemas, que nos permitissem realizar essa leitura e uma ação de formação continuada com professores dos anos iniciais do ensino fundamental. Os dados produzidos foram registrados em cadernos com a produção dos sujeitos da pesquisa e videogravação dos encontros. Ao realizar a análise dos dados produzidos pelos professores na ação formativa, inferimos que os problemas se mostraram adequados para os usados ou adaptados para a sala de aula, de acordo com as especificidades de cada professor. Com relação às potencialidades do Modelo de Barras, indicam que, para o professor amplia a segurança para trabalhar com relação de problemas, desperta no professor a sensibilidade para adoção e adaptação de multiestratégias de resolução de problemas, inclusive usando materiais e recursos manipuláveis (Ábaco e Material Dourado etc.), incentiva a adequação e elaboração de problemas a partir do livro didático ao contexto da escola, contribui para trabalhar de forma inclusiva ou com sala heterogênea. Em relação às possíveis implicações junto aos alunos da educação os professores que aplicaram o recurso durante a formação, observaram que aumenta a persistência dos alunos ao buscar uma solução para o problema, provoca mudança da dinâmica da turma e das aulas e aumenta o interesse dos alunos em aprender matemática.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Formação de Professores; Modelo de Barras; Modelo dos Campos Semânticos; Resolução de Problemas.

ABSTRACT

Problem solving is a methodological resource still little applied by teachers who teach Mathematics in Basic Education. The results of those who apply it have not yet been satisfactory in large-scale assessments. Among the pedagogical strategies to teach problem solving, the Bar Model - a resources widely used in Singapore and little known in Brazil - has drawn the attention of educational managers and researchers, because the countries that adopted it have made progress in the latest assessments of the Program for International Student Assessment (PISA). This paper aims to understand and evaluate, from the point of view of teachers who teach mathematics in the early years of elementary school, possible effects of adopting the Bar Model in the teaching and learning processes in solving mathematical problems in the second cycle of elementary school in Sinop (MT). For this, adopting the qualitative research, we sought a didactic and analytical posture, from the perspective of the Model of Semantic Fields (MCS) of Lins (1999, 2001, 2004, 2012), we developed an educational product consisting of a collection of problems, which allowed us to perform this reading and a continuing education action with teachers of the early years of elementary education. The data produced were recorded in notebooks with the production of the research subjects and videotaping of the meetings. When we analyzed the data produced by the teachers in the formative action, we inferred that the problems were adequate to be used or adapted to the classroom, according to the specificities of each teacher. Regarding the potentialities of the Bar Model, they indicate that, for the teacher, it increases security to work with problem relation, awakens the teacher's sensibility to adopt and adapt multi-strategy problem solving, including using manipulative materials and resources (Abacus and Golden Material etc.), encourages the adaptation and elaboration of problems from the textbook to the school context, contributes to work inclusively or with heterogeneous classrooms. Regarding the possible implications for the students, the teachers who applied the resources during the training course observed that it increases the persistence of the students in seeking a solution to the problem, causes a change in the dynamics of the class and of the classes, and increases the interest of the students in learning mathematics.

Keywords: Mathematics Teaching; Teacher Education; Bar Model; Semantic Fields Model; Problem Solving.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. As quatro etapas de Polya para a resolução de problemas 43
Quadro 2. Sequência dos problemas selecionados para o curso 53
Quadro 3. Caracterização dos periódicos analisados e identificação dos artigos 55
Quadro 4. Questão 4: Descreva brevemente há quanto tempo atua como professor e em quais ciclos (anos). 61
Quadro 5. Questão 7: Você usa materiais manipuláveis e/ou recursos pedagógicos em tua sala de aula de matemática? Em quais situações? Se sim, cite-os 61
Quadro 6. Questão 8: Em tuas aulas com que frequência você trabalhar Resolução de Problemas Matemáticos com teus alunos? 62
Quadro 7. Questão 10: Qual tua expectativa em relação a este curso? 63

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Imagem 1: Problema tipo parte-todo...47

Imagem 2: Problema tipo comparação. 47

Imagem 3: Problema tipo antes-depois. 47

Figura 1. Cadernos de registro dos sujeitos de pesquisa. 60

Figura 2. Nuvem de palavras da Questão 9: Escreva as cinco palavras que mais identificam tua experiência em trabalhar resolução de problemas com teus alunos. 62

Figura 3. Problema da sala de aula de Carlos. 65

Figura 4. Problema da sala de aula de Carlos resolução de Baru 65

Figura 5. Problema da sala de aula de Carlos resolução com ábaco. 68

Figura 6. Registro produzido no caderno do sujeito de pesquisa Sibipiruna. 71

Figura 7. Estratégia do sujeito de pesquisa Itaúba. 73

Figura 8. Estratégia do sujeito de pesquisa Angico. 73

Figura 9. Modelagem do problema do Buquê de flores. 74

Figura 10. Estratégia utilizada pelo sujeito de pesquisa Tarumã. 77

Figura 11. Estratégia no formato horizontal do sujeito de pesquisa Tarumã. 77

Figura 12. Estratégia usando as mãos para ensinar tabuada do 6 ao 10. 81

Figura 13. Modelagem do problema alunos do 4º ano. 84

Figura 14. Modelagem do problema dos alunos do 4º ano. 86

Figura 15. Estratégia utilizando ábacos do problema dos alunos do 4º ano. 86

Figura 16. Comparação dos ábacos do problema dos alunos do 4º ano. 87

Figura 17. Estratégia com iniciação à álgebra do problema dos alunos do 4º ano. 89

Figura 18. Estratégia do sujeito de pesquisa Baru do problema do jogo de cartas. 92

Figura 19. Estratégia do problema jogo de cartas desenvolvida pelo sujeito de pesquisa Baru auxiliado pela pesquisadora. 93

Figura 20. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Baru. 94

Figura 21. Modelagem do problema jogo de cartas. 95

Figura 22. Resolução do problema jogo de cartas utilizando Material Dourado. 96

Figura 23. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Jacarandá do problema jogo de cartas. 98

Figura 24. Estratégia apresentada no quadro do sujeito de pesquisa Jacarandá do problema jogo de cartas. 99

Figura 25. Nuvem de palavras a partir das 5 palavras que resumissem a experiência do curso. 101
Figura 26. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Mogno do problema cartas de Marcos e Antônio. 103
Figura 27. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Palmeira do problema pés de codorna e coelho. 104
Figura 28. Resolução do sujeito de pesquisa Aroeira. 105
Figura 29. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Angico do problema pés de codorna e coelho. 106
Figura 30. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Itaúba do problema pés de codorna e coelho. 106
Figura 31. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Acácia do problema pés de codorna e coelho. 107
Figura 32. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Jequitibá do problema pés de codorna e coelho. 107
Figura 33. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Araticum do problema pés de codorna e coelho. 108
Figura 34. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Sibipiruna do problema pés de codorna e coelho. 108
Figura 35. Modelagem do problema pés de codorna e coelho. 109
Figura 36. Resolução por meio da estratégia suposição do problema pés de codorna e coelho. 109
Figura 37. Resolução por meio da estratégia de iniciação à álgebra do problema pés de codorna e coelho. 110
Figura 38. Resolução por meio da estratégia de iniciação à álgebra do problema pés de codorna e coelho do sujeito de pesquisa Jacarandá. 111
Figura 39. Modelagem do problema cartas de Marcos e Antônio. 112
Figura 40. Segunda modelagem do problema cartas de Marcos e Antônio. 112
Figura 41. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Jacarandá do problema cartas de Marcos e Antônio. 113
Figura 42. Estratégia usando um copo descartável para trabalhar problemas do tipo antes-depois. 115
Figura 43. Modelagem do problema Tanque de combustível. 116

Figura 44. Resolução por meio da estratégia de iniciação à álgebra do problema Tanque de combustível. 117
Figura 45. Resolução usando o ábaco do problema Tanque de combustível. 119
Figura 46. Estratégia por meio das barras da Aroeira do problema fábrica de máscaras 120
Figura 47. Estratégia por meio das barras do sujeito de pesquisa Acácia do problema fábrica de máscaras. 121
Figura 48. Estratégia por meio das barras do sujeito de pesquisa Jacarandá do problema fábrica de máscaras. 121
Figura 49. Estratégia por meio das barras do sujeito de pesquisa Itaúba do problema fábrica de máscaras. 122
Figura 50. Estratégia por meio das barras do sujeito de pesquisa Angico do problema fábrica de máscaras. 122
Figura 51. Modelagem do problema fábrica de máscaras. 123
Figura 52. Resíduo de enunciação da Sibipiruna. 125
Figura 53. Resíduo de enunciação da Palmeira. 125
Figura 54. Resíduo de enunciação da Mogno. 125
Figura 55. Resíduo de enunciação da Jenipapo. 126
Figura 56. Resíduo de enunciação da Itaúba. 126
Figura 57. Resíduo de enunciação da Araticum. 126
Figura 58. Resíduo de enunciação da Angico. 127
Figura 59. Resíduo de enunciação da Aroeira. 127
Figura 60. Resíduo de enunciação da Jacarandá. 128
Figura 61. Resíduo de enunciação da Jacarandá. 128
Figura 62. Resíduo de enunciação da Jequitibá. 128
Figura 63. Resíduo de enunciação da Araticum. 129
Figura 64. Resíduo da estratégia por meio das barras do sujeito de pesquisa Sibipiruna do problema Aquário. 148
Figura 65. Resíduo da estratégia por meio das barras auxiliada pelo sujeito de pesquisa Sibipiruna do problema Aquário. 149
Figura 66. Resíduo das resoluções do sujeito de pesquisa Angico do problema inicial e final Aquário. 149
Figura 67. Modelagem do sujeito de pesquisa Tarumã do problema Aquário. 151
Figura 68. Modelagem do problema Aquário. 152
Figura 69. Pentágono ilustrativo do Currículo de Singapura. 154

Figura 70. Resíduo de enunciação da Palmeira do problema inicial. 156
Figura 71. Resíduo de enunciação da Palmeira do problema final. 156
Figura 72. Resíduo de enunciação da Jequitibá do problema inicial. 157
Figura 73. Resíduo de enunciação da Jequitibá do problema final. 158
Figura 74. Resíduo de enunciação da Baru do problema inicial. 159
Figura 75. Resíduos de enunciações da Jenipapo e da Mogno do problema final. 160
Figura 76. Resíduos de enunciações da Acácia do problema inicial. 161
Figura 77. Resíduo das resoluções do sujeito de pesquisa Angico do problema inicial e final Aquário. 162
Figura 78. Resíduo da Sibipiruna do problema final. 163
Figura 79. Potencialidades do Modelo de Barras. 164

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AF	Ação Formativa
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAAE	Certificado de Apresentação para Apreciação Ética
CEFAPRO	Centro de Formação e Atualização dos Profissionais da Educação Básica de Sinop
CEFORME	Centro de Formação Continuada da Rede Municipal de Ensino
CEP	Comitê de Ética em Pesquisa
CPA	Concreta-Pictórica-Abstrata
DRC/MT	Documento de Referência Curricular para Mato Grosso
GT	Grupo de Trabalho
IFMT	Instituto Federal do Mato Grosso
MCS	Modelo dos Campos Semânticos
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática
PE	Produto Educacional
RE	Resíduo de Enunciação
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UAB	Universidade Aberta do Brasil

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS **17**
SEÇÃO I **19**
1 O DESAFIO DA EVOLUÇÃO DA MINHA PRÁTICA DOCENTE **19**
1.1 Experiência e o desafio da evolução 19
1.2 Justificativa 24
1.3 Objetivos 25
1.3.1 Objetivo geral 25
1.3.2 Objetivos específicos 25
1.4 Metodologia da pesquisa 26
1.4.1 Seleção e caracterização dos sujeitos da pesquisa 27
1.4.2 Instrumentos de registro da pesquisa e a produção de dados 31
SEÇÃO II **32**
2 AÇÃO FORMATIVA ELABORAÇÃO DE UMA PROPOSTA DE PRODUTO EDUCACIONAL E PREPARAÇÃO PARA A AÇÃO FORMATIVA 32
2.1 Modelo dos Campos Semânticos (MCS) 32
2.2 As caracterizações do ensino e da aprendizagem da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental propostos pela BNCC, DRC/MT e PCN de Matemática para resolução de problemas 35
2.3 As quatro etapas de Polya para resolução de problemas 42
2.3.1 Tipos de problemas 46
2.4 Modelo de Barras 48
2.5 O produto Educacional (PE) 51
2.6 Efeitos a *priori* do modelo de barras 54
2.7 Hipóteses de possíveis efeitos a *posteriori* do modelo de barras 57
SEÇÃO III **59**
3 AÇÃO FORMATIVA **59**
3.1 Algumas ideias do modelo dos campos semânticos a partir da aplicação dos problemas na primeira etapa da ação formativa - o curso 59
3.1.1 Aplicação e análise do questionário inicial 60
3.1.2 Aplicação do problema 1 – Sala de aula de Carlos 64
3.1.3 Aplicação do problema 2 – Buquê de flores 72

3.1.4 Aplicação do problema 3 – Alunos do 4º Ano 80
3.1.5 Aplicação do problema 4 – Jogo de cartas 90
3.1.6 Segundo encontro do curso 101
3.1.7 Problema 5 –Codornas e coelhos 102
3.1.8 Aplicação do problema 6 – Cartas de Antônio e Marcos 111
3.1.9 Aplicação do problema 7 – Tanque de combustível 114
3.1.10 Aplicação do problema 8 – Fábrica de máscaras 119
3.3 Sinalizações dos professores após aplicação do questionário de avaliação do curso 124
3.4 Discussão sobre os efeitos do modelo de barras, por meio do grupo de trabalho 129
3.4.1. Validação do produto educacional pelo grupo de trabalho 140
SEÇÃO IV 141
4 ANÁLISES A POSTERIORI E A VALIDAÇÃO DO PRODUTO 141
4.1 Aplicação do problema inicial - Aquário 141
4.2 Aplicação do problema final - Aquário 144
4.3 As análises dos efeitos do modelo de barras 155
CONSIDERAÇÕES FINAIS 166
REFERÊNCIAS 172
ANEXOS 175
Anexo 1: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para os professores 175
Anexo 2: Protocolo de Segurança 177
Anexo 3: Questionário Inicial 179
Anexo 4: Avaliação do Curso 181
Anexo 5: Ficha de Avaliação 183
Anexo 6: Ficha de aprovação do produto educacional 184
APÊNDICE 187
Apêndice 1: Produto Educacional Modelo de Barras Disparador de multiestratégias de resolução de problemas 187

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Esta pesquisa é vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM), da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), e insere-se na linha de pesquisa Ensino de Matemática, tendo como objeto de estudo os efeitos do uso do recurso modelo de barras no processo de ensino e aprendizagem de resolução dos problemas matemáticos no 4º, 5º e 6º anos, do Ensino Fundamental.

Para tomar forma esta pesquisa precisei criar todo um movimento, este cheio de desafios, uma vez que, em plena Pandemia da Covid-19, alguns percalços inviabilizaram encontros presenciais na Universidade com os professores, visitas às escolas públicas e, à medida que os decretos permitiam encontros o número de participantes era restrito. Contudo, foi possível realizar a pesquisa de forma presencial.

A base da pesquisa foi estruturada por meio de uma intenção ímpar: contribuir não somente a minha prática como docente, mas a outros professores que ensinam matemática, principalmente aos pedagogos. Logo, o objetivo principal da pesquisa foi analisar, junto com um grupo de professores que ensinam Matemática no 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, os efeitos do Modelo de Barras no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos.

Para alcançar esse propósito, foi desenvolvido um produto educacional, uma versão de livro para professor, composto por uma coletânea de problemas que permitissem realizar essa leitura, sinalizasse a opinião dos professores com relação ao uso do Modelo de Barras, assim como a aplicação desses problemas. Para tal, adotou-se uma postura didática e analítica, na perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) de Lins (1999, 2001, 2004, 2012).

Nesta dissertação, apresento os efeitos do Modelo de Barras nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução dos problemas matemáticos, no 2º ciclo do Ensino Fundamental, os quais são resultados da análise dos dados produzidos por meio de uma Ação Formativa.

A Ação Formativa foi dividida em duas etapas: curso sobre o Modelo de Barras, onde foi apresentado o recurso aos professores e a aplicação dos problemas selecionados do produto educacional; e a constituição de um Grupo de Trabalho (GT), com professores que ensinam matemática no segundo ciclo do Ensino Fundamental.

Em resumo, esta dissertação está estruturada em quatro sessões, cada uma narrei de forma detalhada as etapas desta pesquisa.

Na Seção I, apresento o desafio da evolução na prática docente como pesquisadora, isto é, falo da Stela, e meu objetivo com a pesquisa conforme, citei a pouco. Além disso, apresento a revisão da literatura que trata sobre o Modelo de Barras, Resolução de Problemas e do Modelo dos Campos Semânticos.

Na Seção II, trato da elaboração do produto educacional, composto por quinze problemas elaborados por mim, onde apresento multiestratégias de resoluções para apenas um problema. Também, apresento a preparação da Ação Formativa (Curso e GT) em que a descrevo.

Na Seção III, apresento a narrativa da aplicação dos problemas do produto educacional o qual produzi os dados para análise dos resultados, destacando os aspectos mais importantes encontrados nos resultados da pesquisa, a fim de contribuir melhor para o entendimento do trabalho e explicitar as contribuições deste estudo.

Na Seção IV, correlacionei dois problemas selecionados do produto educacional, os quais chamei de problema inicial e problema final, que foram aplicados na primeira etapa da Ação Formativa, no curso, a fim das análises a *posteriori* e validação do produto educacional. Também foi realizada a investigação a fim de sinalizar os efeitos do Modelo de Barras, nos processos de ensino e de aprendizagem de resoluções de problemas.

Ao final, nas Considerações Finais, retomo algumas questões apontadas no decorrer de todo o trabalho, exponho minha nova forma de olhar a postura enquanto docente, minha experiência de aprendizagem no mestrado, respondo à pergunta problema da pesquisa, "quais os efeitos do Modelo de Barras nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos?". Trago sinalizações apontadas pelos professores em que o Modelo de Barras pôde e pode contribuir para modificar o modo de resolver e de ensinar a resolver problemas.

Considero também sobre a importância da metodologia adotada na pesquisa que foi importante para a construção dos resultados, bem como o referencial teórico para o desenvolvimento do trabalho, uma vez que foram pertinentes ao meu propósito em legitimar e validar o produto educacional, com os professores.

Por fim, apresento as potencialidades do Modelo de Barras e como a pesquisa se conecta a um leque de possibilidades, até mesmo para futuras pesquisas direcionadas à educação infantil, nos anos iniciais e finais, ensino médio e a graduação em licenciatura de pedagogos e matemáticos.

SEÇÃO I

1 O DESAFIO DA EVOLUÇÃO DA MINHA PRÁTICA DOCENTE

Esta seção tem por objetivo apresentar o desafio da evolução da minha prática docente, por meio de uma discussão acerca das relações entre aprender matemática e seu ensino, na qual discuti também a importância no aperfeiçoamento do repertório docente e como este pode contribuir no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas.

1.1 Experiência e o desafio da evolução

No início da carreira docente, como pedagoga, por muitas vezes, deparei-me com situações complexas em sala de aula, seja esforçando-me para ensinar Matemática, ou alunos que apresentavam especificidades diante dessa disciplina. As maiores dificuldades e estranhamentos ocorreram quando se tratava de resolução de problemas matemáticos.

Contando, com oito anos de experiência docente, passei por todos os ciclos do ensino da Educação Básica, sendo que os processos de ensino e de aprendizagem por meio da resolução de problemas, revelaram-se como uma desafiadora experiência docente, por exigir tanto da professora como dos alunos mais do que apenas ensinar e aprender um conceito, mas, também, mobilizar um conjunto de atitudes, competências e habilidades.

Da professora exigia: domínio do conteúdo, clareza de metodologias de ensino de estratégias de resolução de problemas, capacidade para lidar com a heterogeneidade de alunos, conhecimento pedagógico, paciência e organização para elaborar situações de ensino e aprendizagem.

Dos alunos demandava: capacidade de leitura, compreensão e produção de significado para a atividade, elaboração de estratégia, persistência e organização para manter e desenvolver uma estratégia, rigor para avaliação dos passos da estratégia e validação do resultado, resiliência para refazer o processo caso não obtivesse êxito na primeira tentativa de resolução do problema, articulação para expressar (comunicar, apresentar) solução coerente do problema.

Em consideração ao meu histórico de experiências e níveis formativos, há tempos que busco por estratégias pedagógicas que possam ampliar as possiblidades de aprendizagem dos alunos e meu repertório pedagógico nos modos de ensinar.

Diante das demandas e dificuldades percebidas nesses oito anos de carreira docente, tendo por base reflexões acerca da prática em sala de aula, percebi que precisava ampliar meu repertório pedagógico, notadamente matemático, visando elaborar com mais clareza, objetividade e segurança planos e estratégias pedagógicas para superar limitações, enfrentar as demandas apresentadas e conduzir os processos de ensino e de aprendizagem de forma mais consistente.

Para ampliar meu repertório de conhecimento matemático, com o intuito de aperfeiçoar minha formação enquanto professora de Matemática, cursei Licenciatura em Matemática, pelo Instituto Federal do Mato Grosso (IFMT), por meio da Universidade Aberta do Brasil (UAB).

Como forma de entender, desempenhar melhor a atividade docente e conduzir processos de ensino e de aprendizagem da disciplina de matemática, no ano de 2020 ingressei no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM), buscando conhecer e compreender os preceitos, presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), como também alternativas interessantes e exitosas no ensino de matemática por meio da resolução de problemas.

Entendo que seja importante o professor organizar um ambiente que proporcione aos alunos interação, comunicação, trocas de experiência para a produção de significado na atividade, fazendo com que o aluno seja protagonista. Isso, em meu entendimento, vai além de ficar restrito à um modo de ensinar, por mais eficiente que esse seja, haja vista que priorizar o aluno em sua maneira de fazer, possibilitará melhor construção de seu conhecimento. Como, em geral, os alunos são diferentes, possuem distintas experiências, práticas culturais, econômicas e sociais faz-se necessário, para organizar ambientes propícios às diferentes aprendizagens, buscar diferentes modos de ensinar.

Além disso, conforme a BNCC (BRASIL, 2017), a resolução de problemas é uma macro competência que a Matemática deve assumir como sua, estabelecendo como uma metodologia de ensino de Matemática, contudo o foco deste trabalho não está associado a uma metodologia de ensino, mas usar um recurso para ensinar professores que ensinam matemática a resolver situações-problemas por diferentes estratégias pedagógicas dada a disparidade geográfica e humanística do território nacional, o estado de Mato Grosso, buscando regionalizar e adaptar o ensino à sua realidade, criou o Documento de

Referência Curricular para Mato Grosso (DRC-MT), desenvolvido à luz da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No Documento de Referência Curricular para Mato Grosso (DRC/MT) (MATO GROSSO, 2018), são descritas três sugestões de abordagens metodológicas específicas, para o ensino da Matemática, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Etnomatemática, Modelagem Matemática e Resolução de Problemas, faz sentido ensinar e aprender conceitos matemáticos se forem explorados em problemas do cotidiano.

> A Resolução de Problemas começa a ser vista como metodologia de ensino a partir dos Standards (2000), o que é confirmado também nos Parâmetros Curriculares Nacionais (2000). Atualmente, a Resolução de Problemas consta nos documentos da BNCC como uma macro competência que a Matemática deve assumir como sua (DRC/MT) (MATO GROSSO, 2018, p. 23-24).

De acordo com o DRC/MT (MATO GROSSO, 2018, p. 24-25), a Resolução de Problemas "é uma metodologia de ensino em que são propostas situações com objetivo de despertar nos estudantes a investigação e exploração de novos conceitos", além disso "temos a resolução de problemas como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática".

Diante disso, em concordância com o DRC/MT, ensinar Matemática por meio da resolução de problemas é "um caminho que se destaca por ensinar Matemática para além de resolver problemas. Aliás, este ponto de vista é inovador, no qual o professor é o mediador e o aluno é protagonista no processo de ensino e aprendizagem". (MATO GROSSO, 2018, p. 25). Logo, entendo que resolução de problemas é vista como foco principal do ensino, porém as estratégias pedagógicas são limitadas, desfavorecendo o processo de aprendizagem dos educandos.

De acordo com Gontijo (2007), a resolução de problemas é uma metodologia de ensino utilizada, em outros países, com muito êxito, porém, no Brasil, ainda é pouco aplicada pelos professores que ensinam Matemática na Educação Básica.

Para Dante (1988), a resolução de problemas demanda iniciativa e criatividade relacionada ao conhecimento de outras estratégias pedagógicas, isto é, devem ser apresentados diferentes modos de ensinar a resolução de problemas, de modo que o aluno possa variar a sua operação. Vale ressaltar que, apresentar outros recursos para ensinar resolução de problemas é uma forma de enriquecer o trabalho do professor nos processos de ensino e de aprendizagem, mas percebo que muitos professores que ensinam matemática adotam a resolução de problemas como metodologia de ensino focados em conteúdo e não ao processo de aprendizagem, assim desperdiçando a exploração e desenvolvimento de outras formas de ensinar. Para Pozo (1998, p. 9) “a solução de problemas é uma das maneiras mais acessíveis para levar os discentes a aprender a aprender”. Além disso, um problema compreende a apresentação de fatos contextualizados e interessantes que intentam do aluno instigação e esforço para buscar suas próprias respostas e, à vista disso, a construção do seu próprio conhecimento. Ainda segundo esse autor, resolver situações-problemas pode conduzir o aluno a criar técnicas próprias de resolução, bem como utiliza conhecimentos prévios a fim de responder às situações diferentes (POZO, 1998).

Allevato e Onuchic (2014) consideram a metodologia de resolução de problemas como o “coração” da atividade matemática, afirmando também que é uma propulsora para a construção de novos conhecimentos. As autoras acreditam que a resolução de problemas seja uma das possibilidades metodológicas mais apropriadas, ao campo de complexidade em que se encontram atualmente as escolas, no qual se incorpora o imprescindível trabalho do educador matemático.

Diante do exposto, explicito que na BNCC (BRASIL, 2017), a resolução de problemas tem dois sentidos: é metodologia de ensino e, também objeto de conhecimento. Contudo, vale destacar que nesta pesquisa o recurso Modelo de Barras foi usado para ensinar a resolver problemas que é diferente de adotar a resolução de problemas, como metodologia de ensino.

Para resolver um problema é possível empregar diferentes estratégias pedagógicas. Polya (2006) descreve que a resolução de problemas dispõe de quatro etapas diferentes, sendo elas: compreensão do problema, logo depois, estabelecimento de um plano, seguidamente, execução do plano e, por fim, reflexão sobre a estratégia de resolução adotada.

Na literatura consultada, relacionado à resolução de problemas matemáticos, deparei-me com trabalhos a respeito do uso do recurso Modelo de Barras para o ensino de Matemática e o que mais despertou a atenção foi o fato da resolução de problema ser o eixo do currículo singapurense.

O Modelo de Barras é um recurso para representar graficamente os dados do enunciado, de um problema vinculado à representação pictórica similar das atividades de manipulação de materiais pedagógicos, sendo um recurso usado para resolver problemas matemáticos em Singapura e, levando muitos países a adotá-lo nos seus sistemas educativos, uma vez que os estudos apontam que este método é considerado descomplicado e cheio de multimodalidades. Além disso, os países que adotaram o Modelo de Barras obtiveram progresso nas últimas avaliações, como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA).

Segundo Abreu (2017, p. 17), o método utilizado para ensinar matemática em Singapura é “reconhecido e aplicado atualmente num número crescente de países”, por causa deste, provavelmente, seja o principal desencadeador dos resultados satisfatórios e do sucesso de Singapura.

A análise dos trabalhos científicos selecionados sobre o Modelo de Barras, como base para as construções teóricas nos anos iniciais do Ensino Fundamental (SIMÕES, 2015; DOTTI, 2016; ARÊDE e SILVA, 2016; ABREU, 2017; LIMA *et al.*, 2017; SAJNIM, ALMEIDA, 2017; MALTA, LOPES, 2018) e anos finais do Ensino Fundamental (QUEIROZ, 2014; GOIS, 2014; CINTRA, 2017; PORTO, COSTA, 2018; SANTOS, 2019), apresentaram informações relevantes como experiências de professores que ensinam Matemática, em diferentes níveis do ensino, apontando as contribuições do método na aprendizagem dos alunos. Contudo, essas pesquisas não apresentam um parecer dos professores com relação a continuidade de usar ou não o recurso Modelo de Barras em suas aulas que dispertaram meu interesse pela investigação.

Mostram também que o Modelo de Barras tem uma abordagem concreto-pictórico-abstrato (CPA), promovendo o processo mental do aluno e aprendizagem de forma significativa em relação à Matemática, consolidando suas habilidades recém-adquiridas para o novo ciclo.

Os textos consultados sobre o Modelo de Barras para resolução de problemas possuem cunho investigativo com alunos da Educação Básica, porém, as pesquisas não apresentam opiniões dos professores em relação a continuidade do uso do recurso e se modificou sua prática docente. Nem tratam de situações voltadas à formação continuada de professores que ensinam matemática.

No Brasil, há um pequeno número de pesquisas realizadas com relação ao uso do recurso Modelo de Barras e, além disso, não respondem às minhas dúvidas, como exemplos: o recurso modificou o modo do professor resolver e de ensinar resolver situações-problemas? Quais mudanças os professores apontam com relação ao uso do recurso Modelo de Barras inserido no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas?

Acredito que são questões pertinentes e relevantes desta investigação, assim iniciei minha busca na revisão de literatura. As modalidades específicas analisadas nas pesquisas da revisão bibliográfica foram: pesquisas realizadas por professores em sala de aula; pesquisas realizadas para formação de professores na Educação Básica; formação de professores em eventos; pesquisas realizadas a partir de revisão bibliográfica e pesquisas realizadas em formação continuada sobre resolução de problemas, por meio do uso do recurso Modelo de Barras.

Dos poucos estudos (3 dos 17 revisados) relacionados à questão, mais especificamente, não explicitam se houve estudo no qual os professores avaliassem os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras no processo de ensino do professor para resolver problemas matemáticos.

As pesquisas de formação continuada trouxeram poucas informações sobre as opiniões dos professores em relação ao uso do Modelo de Barras, inferindo lacunas como o que modificou em sua prática docente, quais as possibilidades de continuar aplicando o método, enfim, quais as vantagens e desvantagens e o que ele ofereceu a esses professores.

Diante do exposto, o presente trabalho tem por escopo, analisar as potencialidades do uso do recurso Modelo de Barras em sala para avaliar seus efeitos na inserção desse recurso pedagógico no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas apresentando-o à professores que lecionam o componente curricular Matemática no 4º, 5º e 6º anos, na Educação Básica em escolas públicas de Sinop (MT) a fim de analisar quais efeitos o uso do Modelo de Barras pode apresentar, nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos.

Então, eis a questão: De que maneira o uso do recurso Modelo de Barras se insere nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos, no 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental?

1.2 Justificativa

A escolha do presente tema vem ao encontro da atividade de docência por mim exercida nos anos iniciais, atualmente, e anos finais, experiência anterior, do Ensino Fundamental da Educação Básica, notadamente no ensino de Matemática.

O fato de o problema escolhido não ter sido ainda muito trabalhado no Brasil, já se torna um tema interessante para se investigar. Para isto, é preciso conhecer o recurso Modelo de Barras e as orientações prescritas na BNCC (BRASIL, 2017), nos Parâmetros

Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1997) e, também, as recomendações de especialistas relativas à resolução de problemas (GONTIJO, 2007; DANTE, 1988; POZO, 1998; ALLEVATO E ONUCHIC, 2014; POLYA, 2006).

É importante ressaltar que a Educação Básica trabalha o currículo com foco nas competências gerais trazidas pela BNCC, nas competências específicas dos diversos componentes curriculares e em seus campos de experiências, habilidades e objetos de conhecimentos.

Creio que a relevância desta pesquisa é saber a opinião dos professores com relação a viabilidade do uso do recurso Modelo de Barras para ensinar a resolver problemas. Busco contribuir não apenas no aperfeiçoamento da minha prática docente, mas também com os colegas de profissão.

A proposta de investigação da pesquisa contribuirá com meu aprimoramento e, por conseguinte, para minha formação profissional, isto é, aperfeiçoarei minha prática docente.

Ademais, motiva-me o fato de, provavelmente, poder contribuir com os demais colegas docentes de Matemática, uma vez que promove a formação continuada destes, bem como torna mais conhecido um produto educacional elaborado por meio de uma discussão coletiva, entre professores que poderão contribuir com suas experiências na aplicação dessa nova estratégia pedagógica para resolver problemas matemáticos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Analisar, junto com um grupo de professores que ensinam Matemática no 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Realizar estudos relativos ao uso do recurso modelo de barras e a resolução de problemas;

2. Apresentar um curso de extensão sobre o recurso modelo de barras como estratégia pedagógica para resolver problemas matemáticos à professores de Matemática do 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, por meio de um conjunto de atividades elaboradas como material de apoio;

3. Averiguar/perguntar e analisar com os professores que participarem do Grupo de Trabalho quais os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos no 4º, 5º e 6º anos, do Ensino Fundamental;

4. Elaboração e sistematização do Produto Educacional, na forma de livro, com uma proposta do uso do Modelo de Barras como recurso pedagógico de resolução de problemas matemáticos para professores do 4º, 5º e 6º anos, do Ensino Fundamental.

1.4 Metodologia da pesquisa

A pesquisa trata de um estudo exploratório e descritivo, com a abordagem qualitativa. Segundo Denzin e Lincoln (2006, p. 15) “envolve a interpretação do mundo, levando em conta que seus pesquisadores têm o cenário natural como fonte de pesquisa, com objetivo de compreender os fenômenos, em termos dos significados que são conferidos a eles pelas pessoas”.

Uma pesquisa qualitativa apresenta, a partir do entendimento de dados descritivos, produzidos diretamente com as situações investigadas, enfatizando as formas de manifestação, os procedimentos e as interações cotidianas do fato investigado, bem como, retratam perspectivas dos participantes.

Considerando que o objetivo do trabalho é saber a opinião e percepções dos professores que ensinam Matemática em relação ao uso do recurso Modelo de Barras, nas escolas de Educação Básica de Sinop (MT) e que os sujeitos deste estudo fornecerão os elementos da investigação, entendemos que o mais adequado para esta pesquisa foi adotar uma abordagem qualitativa.

Para cumprir o objetivo de conhecer e analisar os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras, como estratégia pedagógica de resolução de problemas, este trabalho teve dois momentos diferentes, contudo conexos.

No primeiro momento, foram selecionados e elaborados um conjunto de problemas. No segundo momento, foi organizada e desenvolvida uma ação de formação continuada dividida em duas partes articuladas: um curso de 20 (vinte) horas para apresentação do recurso Modelo de Barras, como estratégia pedagógica de resolução de problemas matemáticos e a constituição de um Grupo de Trabalho (GT) com professores que ensinam matemática no 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental.

Vale ressaltar que a primeira versão do produto educacional (Livro) foi avaliada por três professores da educação básica e dois professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática – PPGECM, os quais sugeriram contribuições e ajustes para que o produto educacional fosse apresentado aos professores durante a ação formativa.

Com base na análise bibliográfica dos livros didáticos e materiais apostilados de matemática do 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental usados nas escolas de Sinop (MT), foram selecionados problemas matemáticos e, a partir deles, elaboramos novos problemas, compondo a primeira versão do Produto Educacional (Livro) (Apêndice 1), com possíveis situações de uso da estratégia do Modelo de Barras que estejam, em nossa avaliação, de acordo com as prescrições das diretrizes curriculares do Ensino Fundamental, como os PCN (BRASIL, 1997), a BNCC (BRASIL, 2017) e o Documento de Referência Curricular para Mato Grosso (DRC/MT) (MATO GROSSO, 2018).

O curso a respeito do uso do recurso Modelo de Barras como estratégia pedagógica de resolução problemas foi organizado por uma equipe de pesquisadores, a saber: o professor orientador Dr. Edson Pereira Barbosa, a pesquisadora e uma colega de mestrado que estudou os efeitos do uso do Modelo de Barras para o ensino de álgebra, nos anos finais do Ensino Fundamental.

1.4.1 Seleção e caracterização dos sujeitos da pesquisa

A forma de abordagem ou plano de recrutamento de professores voluntários para participarem da ação formativa – Curso sobre Modelo de Barras - ocorreu por meio da divulgação de mensagem, via e-mail, da lista de contatos do Centro de Formação Continuada da Rede Municipal de Ensino – CEFORME e do Centro de Formação e Atualização dos Profissionais da Educação Básica de Sinop – CEFAPRO. Após divulgação, a pesquisadora foi presencialmente às escolas que manifestaram interesse em participar da Ação Formativa.

Aos interessados foi entregue o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido - TCLE (Anexo 1) para que pudessem ler, concordar e assinar, sendo que este documento confirma a participação na primeira etapa da Ação Formativa.

Na primeira etapa da ação formativa, curso sobre o uso do recurso Modelo de Barras, foi apresentado e desenvolvido aos professores que ensinam matemática o Modelo de Barras como estratégia pedagógica de resolução de problemas matemáticos. Nessa oportunidade, os professores produziram dados para a pesquisa, foi utilizado como instrumento de coleta de dados um questionário inicial (Anexo 3) com questões orientadoras, que por meio deste começamos nossa discussão, uma vez que suas opiniões e formas de resoluções foram observadas e registradas no caderno de anotações da pesquisadora.

A realização da primeira etapa da Ação Formativa, o curso, desenvolveu-se com professores que ensinam matemática nos anos iniciais, atuam em escolas Municipais e Estaduais da cidade de Sinop-MT.

Participaram da pesquisa 14 (quatorze) professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, de 5 (cinco) escolas estaduais e escolas municipais de Educação Básica (EMEB) do município de Sinop, sendo os participantes lotados: 1 (uma) professora de 3º ano da EMEB Rodrigo Damasceno; 1 (uma) professora de 5º ano da EMEB Professor Jurandir Liberino de Mesquita; 1 (uma) professora de sala de AEE e 1 (uma) professora de 4º ano da EMEB José Reinaldo de Oliveira; 1 (uma) professora de 4º ano e 2 (duas) professoras de 5º ano da Escola Estadual Édina Dalobetta; e, por último, 1 (uma) professora de 2º ano, 3 (três) professores de 5º ano, e dentre os participantes a diretora, a coordenadora e 1 (uma) professora de sala de AEE da Escola Estadual Jorge Amado.

Faz oportuno ressaltar que propus à diretora e à coordenadora participarem do curso, uma vez que ambas são pedagogas, também poderiam partilhar experiências como forma de contribuir não apenas em sua formação particular, mas a *posteriori* como membros da equipe de gestão escolar.

Para a realização da pesquisa elaborei 2 (dois) questionários com questões orientadoras, sendo que o questionário inicial (Anexo 3) foi aplicado no primeiro e o questionário de avaliação do curso (Anexo 4) no último encontro, com intuito de promover discussões e investigações acerca do que os professores pensam sobre o Modelo de Barras, bem como servir de suporte à busca por informações, que respondem aos objetivos da pesquisa.

Os questionamentos, dúvidas e considerações acerca dessas compreensões e perspectivas foram registrados no caderno de anotações da pesquisadora e nos cadernos de registros dos sujeitos participantes.

A escolha desses professores que ensinam matemática foi feita de forma a garantir a variedade de produção de dados pelos sujeitos de pesquisa que atuam em diferentes escolas, dentre essas variantes temos professores com: i) experiências no ensino da Matemática em outros ciclos; e ii) com variação de períodos de atuação na docência.

A caracterização dos sujeitos foi obtida por meio de questionário aplicado aos professores no primeiro encontro do curso. Assim na verificação foram elencados todos com formação em Licenciatura em Pedagogia.

Com relação a faixa etária dos sujeitos de pesquisa, participaram 4 (quatro) com idade entre 31 a 40 anos, 5 (cinco) entre 41 a 50 anos e 5 (cinco) entre 51 a 60 anos relação.

Na primeira etapa da ação formativa, Curso Modelo de Barras, foi apresentado e desenvolvido, junto a esses professores o Modelo de Barras como estratégia pedagógica para ensinar resolver problemas matemáticos.

O curso foi realizado nos dias 14 e 28 de agosto de 2021, com carga horária de 20 (vinte) horas ministrado aos sujeitos da pesquisa.

Nos encontros desse curso pretendíamos, à medida que íamos aplicando os problemas, discutir as possiblidades de aplicação ou não do recurso Modelo de Barras em turmas da Educação Básica de Sinop (MT), adaptar problemas de livro didático/apostila/caderno de atividades para serem resolvidos pelo Modelo de Barras, adequar os problemas conforme a demanda da turma apresentada pelo professor, discutir e exercitar o uso de materiais e recursos manipuláveis (Frac-Soma, Régua de Cuisenaire, Material Dourado, Ábaco) que possam ser utilizados conforme as indicações dos participantes.

Ao final do curso os professores participantes foram convidados a compor um Grupo de Trabalho (GT), aos interessados foi entregue o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (Anexo 1) para que pudessem ler, concordar e assinar para participar do GT, constituindo assim a segunda etapa da Ação Formativa. O objetivo do GT foi continuar discutindo e analisando, junto aos professores, os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos em sala de aula de 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental.

Desse modo, o grupo formado constituiu-se por duas professoras dos anos iniciais, sendo uma do 4º ano e uma do 5º ano.

Os grupos de trabalhos se caracterizam, segundo Viola dos Santos et al. (2014, p. 9), “como espaços formativos nos quais profissionais se encontram com objetivo de compartilhar entraves, potencialidades e realizações de suas práticas profissionais uns com os outros”. Esses autores reforçam ainda que grupo de trabalho não deve ser confundido com um curso, no qual os professores universitários e/ou alunos de Pós-Graduação vão ensinar os professores da Educação Básica e/ou alunos da licenciatura.

Em nossa proposta no GT, diferentemente do curso, as atividades não estarão sistematizadas a priori. A intenção é proporcionar encontros onde ocorram trocas de experiências e aprendizagens mútuas uma vez que o objetivo é discutir, questionar, refletir, aceitar/discordar e, sobretudo, analisar os efeitos do uso do Modelo de Barras no ensino de resolução de problemas, na visão de cada docente, à medida que vivenciam as atividades.

No GT, o pesquisador atua como um organizador flexível, procurando observar as vozes dos profissionais em cada discussão, com intuito de analisar os efeitos compartilhados. A equipe executora do projeto terá o papel de propor atividades disparadoras das discussões, sendo que os caminhos a serem percorridos serão constituídos ao longo do desenvolvimento do GT (SANTANA, 2017; OVANDO, 2017; SANTOS, 2016; WESLEY DA SILVA, 2015).

No GT os professores também produziram dados para a pesquisa, com a produção de um relato da sua experiência, com suas opiniões a respeito do possível uso da estratégia de resolução de problemas matemáticos apresentada em sala de aula, uma vez que as informações observadas foram registradas no caderno de anotações da pesquisadora, bem como no caderno de registros dos sujeitos participantes.

Os encontros da ação formativa, GT, foram realizados no Auditório do PPGECM, sala 4, do Câmpus Universitário de Sinop, da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), seguindo todas às orientações de prevenção ao coronavírus (Covid-19) recomendadas pelas autoridades sanitárias e do Comitê de Enfrentamento e Planejamento de Ações Referentes à COVID-19 do Câmpus Universitário de Sinop (CEAP/CUS/UFMT).

O referencial teórico-metodológico que alicerçou o trabalho foi o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), pois o MCS, segundo Viola dos Santos et al. (2014, p. 9) oportuniza uma maneira de pesquisadores fazerem leituras, interações e intervenções nos modos de produção de significados de professores.

As atividades resolvidas pelos professores foram organizadas em cadernos exclusivos para uso no grupo de trabalho, recolhidos ao final de cada encontro, sendo identificados por um Nickname (Apelido), este distribuído de forma aleatória com nomes de Árvores típicas da região de Sinop. Assim, não houve identificação com nome próprio dos sujeitos. Haja vista que eles são identificados por: Jenipapo, Sibipiruna, Itaúba, Aroeira, Araticum, Angico, Jacarandá, Jatobá, Jequitibá, Tarumã, Mogno, Palmeira, Acácia e Baru.

1.4.2 Instrumentos de registro da pesquisa e a produção de dados

Para realização dessa pesquisa entendemos adequada uma abordagem metodológica qualitativa que privilegiasse os relatos de compreensões e observações, análise de documentos e diálogos com sujeitos. Os sujeitos envolvidos foram 14 (quatorze) professores que atuam em sala de aula, em escolas municipais e estaduais do Ensino Fundamental, do município de Sinop-MT.

A participação dos professores em todo o processo de pesquisa tinha como propósito da pesquisadora validar o produto educacional, visto que validar significa no meu entendimento a legitimidade da qual LINS fala no MCS (1999, 2012), e conhecer uma estratégia pedagógica disparadora de multimodalidades para resolver problemas matemáticos — o Modelo de Barras — e adquirirem um novo repertório docente para sua atuação profissional, em sala de aula.

Os encontros da Ação Formativa, o curso e os dados foram registrados por meio de videogravações (duas câmeras filmadoras, sendo uma voltada para o grupo e outra para o quadro), audiogravações (gravador no meio da sala para captação de som ambiente), caderno com as soluções dos professores participantes e fotografias; vídeo e áudio relato e o caderno de anotações da pesquisadora.

Outro instrumento para produção dos dados foi por meio da observação, uma vez que essa técnica nos possibilitou conseguir informações reais, além de ver e ouvir, mas analisar efeitos significativos, bem como, reconhecer e se relacionar com os indivíduos analisando as suas atitudes e potencialidades.

SEÇÃO II

2 AÇÃO FORMATIVA ELABORAÇÃO DE UMA PROPOSTA DE PRODUTO EDUCACIONAL E PREPARAÇÃO PARA A AÇÃO FORMATIVA

Nesta seção é apresentada a revisão de literatura e fundamento teórico, segundo uma leitura plausível dos referenciais curriculares, teóricos de resolução de problemas e pesquisas sobre Modelo de Barras.

O fechamento da seção, trata-se da organização do produto educacional e da preparação da ação formativa: curso e o grupo de trabalho em que foram abordados aspectos relevantes mediante leitura positiva, assim como a leitura plausível da organização da condução de análise dos dados.

2.1 Modelo dos Campos Semânticos (MCS)

O MCS foi desenvolvido pelo Prof. Rômulo Campos Lins. O modelo nasceu e cresceu no interior da Educação Matemática, mas sempre existiu em muitas outras partes. Em todas, aliás, onde existe o ser (verbo) humano, já que o que lhe interessa, em última instância é a interação que nos faz humanos. Porque fala de conhecimento, se interessa pelas teorias do conhecimento (LINS, 2012).

O Modelo constitui-se em um conjunto de noções e nas relações entre elas; ele sempre foi pensado como um quadro de referência apenas, a partir do qual o que vai existindo (sempre de forma emergente e emergencial) é tratado: a complexidade é apenas um possível resultado de um processo de produção de conhecimento e de significado, e o Modelo apenas existe enquanto está em movimento, “em ação”. Estudar o MCS é usá-lo, exatamente isto (LINS, 2012).

Além disso, Lins (2012) explicita alguns de seus posicionamentos teórico-metodológicos, apresentando-os em quatro de suas noções: significado, objeto, interlocutor e leitura plausível. Trata-se de um movimento que nos permite olhar o mundo de várias maneiras proporcionando a nossa própria invenção.

Na perspectiva do MCS, tem-se por significado o que o sujeito de fato disse sobre um objeto em sua atividade, nas palavras de Lins (1999, p. 86) “o significado de algo é aquilo que digo deste algo. Grosso modo, significado, para mim, é o que a coisa é”. Assim, o MCS preocupa-se com os modos de produção de significados, constituindo o objeto.

Na perspectiva do MCS, objeto “é aquilo para que se produz significado” (LINS, 2012, p. 28), no interior de uma atividade. À medida que produzimos significados, constituímos objetos, ou seja, a partir do momento em que o aluno precisamente faz a observação dos dados de um problema, automaticamente já produzirá significados e se constituindo o processo de produção de significado, para chegar à resolução dele.

Para Lins (1999, p. 83) “toda tentativa de se entender um autor deve passar pelo esforço de olhar o mundo com os olhos do autor, de usar os termos que ele usa de uma forma que torne o todo de seu texto plausível”. Desse modo, Lins constrói a noção de leitura plausível, isto é, procurar identificar como o outro se expressa na linguagem aos gestos do corpo.

> A leitura plausível se aplica de modo geral os processos de produção de conhecimento e significado; ela indica um processo no qual o *todo* que foi dito faz sentido. Outra maneira de dizer que faz sentido em seu todo, é dizer que o todo é coerente (nos termos de quem eu constituo como <u>um</u> autor do que estou lendo). Isso *não* quer dizer que "toda fala é coerente". Assim como há situações nas quais eu não consigo produzir significado para um resíduo de enunciação, há falas para as quais eu não consigo produzir uma coerência plausível (LINS, 2012, p. 23).

Enquanto uma leitura positiva

> Possui utilidade nas situações de interação, como são (ou como deveriam ser) todas as situações pertinentes aos processos de ensino e de aprendizagem, embora o MCS, nesse interim, refira-se a qualquer situação de interação (LINS, 2012, p. 23).

Assim, o objetivo de fazer uma leitura positiva foi "saber *onde o outro* (cognitivo) *está*" (LINS, 2012, p. 23, grifo do autor), para que eu possa supor o que os professores estão pensando e, então, analisar se pensamos da mesma forma ou não para tentarmos fazer com que se interesse em saber como pensamos (LINS, 2012, p. 24). Com *leituras positivas* objetivamos "realizar mapeamento(s) do ´terreno` e, concomitantemente, tratar de saber onde o outro está" (LINS, 2012, p. 24).

De acordo com Lins et al. (2012, p. 16) o MCS se interessa centralmente na seguinte passagem: “ ‘eu’ falo na direção de um interlocutor que é uma direção na qual, acredito, o que estou dizendo poderia ser dito com a mesma justificação que tenho para dizer”. Assim, “a produção da enunciação (produção de conhecimento, produção de significado) antecipa (esperançosamente) a legitimidade da enunciação” (Idem).

Segundo Lins (2012) um campo é um processo, logo um processo iniciado cria as condições para sua transformação. Desse modo, “um campo semântico indica um modo legítimo de produção de significado. Legítimo porque está acontecendo” (Idem, p.18).

> Um campo semântico, *de modo geral*, é como se fosse um jogo na qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores *dentro de limites*; que limites são estes? Só saberemos *a posteriori*: Enquanto a interação continua, porque as pessoas estão operando em um mesmo Campo Semântico (LINS, 2012, p. 17, grifo do autor).

Aos olhos de Lins (2012, p. 18), “do ponto de vista da produção de conhecimento e significado, e da constituição de objetos, campo semântico é a unidade de análise adequada”. E, “do ponto de vista da teorização, "campo semântico" serve para articular "produção de conhecimento", "significado", "produção de significado", e "objeto"”.

Lins (2012, p. 18) ressalta que “o MCS oferece: Um quadro de referência para que se possa produzir leituras suficientemente finas de processos de produção de significados”. Além disso, o interesse do MCS é “no processo de produção de significado, em sua leitura, e não na permanência, mas essa pode ser teorizada, no modelo, como (apenas) uma foto datada de um processo (de produção de significado)” (Idem, p. 19).

Para Pinto (2012, p. 152, grifo do autor) O MCS é “mais do que uma "ferramenta" analítica ou metodológica para proceder em pesquisa científica, acreditamos que o MCS nos apresenta uma *visão de mundo*”.

Na concepção de Lins (1999, p. 86) “o aspecto central de toda aprendizagem - em verdade o aspecto central de toda a cognição humana - é a produção de significados”. Nesta perspectiva, o modelo é estruturado para que o professor possa olhar para a atividade (matemática) de seus alunos e ver o que eles dizem e não o que fizeram naquele momento.

O recurso Modelo de Barras é um modo de produzir significados a respeito do problema apresentado como demanda.

Conforme Lins (1999) os alunos produzem significados a partir das situações que vivenciam no dia a dia, e essa realidade pode ocasionar a produção de significados não matemáticos. O professor precisa aprender a ler seus alunos, a fazer uma leitura plausível das legitimidades que eles atribuem aos objetos, com que manipulam, pois para Lins o aluno aprende com o objeto e com os outros. Portanto, a aprendizagem ocorre no indivíduo a partir da relação do indivíduo, com os objetos e outras pessoas.

Nessa perspectiva, o MCS é um modelo epistemológico que só existe no campo da ação, assim é entendido como uma teoria que

> [...] provê uma simples, ainda que poderosa, ferramenta para pesquisa e desenvolvimento na educação matemática [...] para guiar práticas de sala de aula e para habilitar professores a produzir uma leitura suficientemente fina [...] (LINS, 2001, p. 59).

A perspectiva de adotar o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) teve como base a leitura plausível da produção de significados dos professores a partir das produções escritas e em vídeos produzidas durante o curso e o GT.

Assim, a intenção da ação formativa foi construir um espaço comunicativo com os professores que ensinam Matemática, baseado em algumas noções do MCS, além do reconhecimento das legitimidades utilizada pelos mesmos, durante o processo de suas enunciações.

2.2 As caracterizações do ensino e da aprendizagem da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental propostos pela BNCC, DRC/MT e PCN de Matemática para resolução de problemas

O desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos deve se converter em objetos de conhecimento, por meio dos diferentes campos que compõem a Matemática, os quais são fundamentais, produzindo articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação.

A BNCC (BRASIL, 2017), propõe cinco unidades temáticas, dentre elas, a unidade temática "Números", que tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, provocando o conhecimento de formas de quantificar atributos de objetos, de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades.

> No Ensino Fundamental – Anos Iniciais, a expectativa em relação a essa temática é que os alunos *resolvam problemas* com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes

> significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados. No tocante aos cálculos, espera-se que os alunos *desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados*, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras. Nessa fase espera-se também o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais por meio da identificação e compreensão de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos. Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária (BRASIL, 2017, p. 268-269, grifo nosso).

O DRC/MT (MATO GROSSO, 2018 p. 24) explicita que a “Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino em que são propostas situações com objetivo de despertar nos estudantes a investigação e exploração de novos conceitos”.

Ensinar Matemática vai além de resolver problemas, segundo o DRC/MT (MATO GROSSO, 2018 p. 25) o professor “é o mediador e o aluno é protagonista no processo de ensino e aprendizagem”.

A aprendizagem no MCS está relacionada à produção de conhecimento que o sujeito cognitivo “se encontra com o que acredita ser um *resíduo de enunciação*, isto é, algo que acredita que foi dito por *alguém* (<u>um</u> autor)” (LINS, 2012, p. 15, grifo do autor).

Com a progressão de um ano para outro, conforme os PCN (BRASIL, 1997), as habilidades devem ser compreendidas e desenvolvidas por meio da utilização de novas ferramentas, à medida que a complexidade das situações-problema propostas, exige em suas resoluções a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas. Como outro exemplo o da resolução de problemas envolvendo as operações fundamentais, utilizando ou não a linguagem algébrica.

> O professor é visto, então, como facilitador no processo de busca de conhecimento que deve partir do aluno. Cabe ao professor organizar e coordenar as situações de aprendizagem, adaptando suas ações às características individuais dos alunos, para desenvolver suas capacidades e habilidades intelectuais (PCN – BRASIL, 1997, p. 31).

Cabe ao educador proporcionar a exploração de outras técnicas para resolver situações-problemas, por meio da intervenção pedagógica. Contudo, há possibilidade de “estabelecer alguma relação entre o que se pretende conhecer e as possibilidades de observação, reflexão e informação que o sujeito já possui” (PCN – BRASIL, 1997, p. 38).

A intervenção educativa é fundamental no processo do conhecimento já adquirido pelo aluno e o que ele aprenderá, formando conexões e ressignificando a construção do seu aprendizado.

> Se a aprendizagem for uma experiência de sucesso, o aluno constrói uma representação de si mesmo como alguém capaz. Se, ao contrário, for uma experiência de fracasso, o ato de aprender tenderá a se transformar em ameaça, e a ousadia necessária se transformará em *medo*, para o qual a defesa possível é a manifestação de desinteresse (PCN – BRASIL, 1997, p. 38, grifo nosso).

A produção de significado acontece quando o aluno está envolvido em uma atividade, de preferência com instrumentos, recursos e diferentes técnicas, e num espaço comunicativo onde seja possível a interação, troca de ideias, e a partilha. Assim, este processo exige colocar problemas que demandam "buscar soluções e experimentar novos caminhos, de maneira totalmente diferente da aprendizagem mecânica, na qual o aluno limita seu esforço apenas em memorizar ou estabelecer relações diretas e superficiais" (PCN – BRASIL, 1997, p. 64).

> A aprendizagem significativa depende de uma motivação intrínseca, isto é, o aluno precisa tomar para si a necessidade e a vontade de aprender. [..] A disposição para a aprendizagem não depende exclusivamente do aluno, demanda que a prática didática garanta condições para que essa atitude favorável se manifeste e prevaleça. Primeiramente, a expectativa que o professor tem do tipo de aprendizagem de seus alunos fica definida no contrato didático estabelecido. Se o professor espera uma atitude curiosa e investigativa, deve propor prioritariamente atividades que exijam essa postura, e não a passividade. Deve valorizar o processo e a qualidade, e não apenas a rapidez na realização. Deve esperar *estratégias criativas* e originais e não a mesma resposta de todos (PCN – BRASIL, 1997, p. 64-65, grifo nosso).

Na perspectiva do MCS, os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática precisam ser desenvolvidos em um ambiente em que a atividade cognitiva em sala de aula tenha os mesmos motivos, para todos estarem ali, um espaço comunicativo em que todos se sintam convidados a se envolver na atividade e, no interior dessa produzam significados, então, o que ensinamos é o modo de produção em que organizamos o ambiente para que o sujeito produza significados a respeito dos recursos e instrumentos que ali estão.

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), o professor precisa propor atividades em que o aluno se sinta desafiado a resolver uma situação problema que apresenta um nível de complexidade nem muito elevado, nem muito baixo, mas que contribua para a reflexão e participação ativa do aluno, no processo de aprendizagem, além de ser capaz de resolvê-la.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997), outro fator a ser considerado relevante é o tempo, este interferindo na construção da autonomia e permitindo ao professor criar situações em que o aluno possa, progressivamente, controlar a realização das suas atividades. Além disso, por meio dos erros e acertos, o aluno toma consciência de suas possibilidades e constrói mecanismos de autorregulação do pensamento e conhecimento, possibilitando racionalizar seu tempo.

Com relação à avaliação, elaborei uma ficha de avaliação (Anexo 5) a qual tem a finalidade de fazer o monitoramento da aprendizagem do aluno em que o professor possa avaliar os modos particulares de produção de conhecimento de cada aluno.

> "Os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação, sejam eles provas, trabalhos, postura em sala, constituem indícios de competências e como tal devem ser considerados. A tarefa do avaliador constitui um permanente exercício de interpretação de sinais, de indícios, a partir dos quais manifesta juízos de valor que lhe permitem reorganizar a atividade pedagógica (PCN – BRASIL, p. 41).

Diante disso, a tarefa do professor, com relação ao desempenho dos alunos, seria analisar o erro, procurando identificar, por meio da observação e do diálogo, como o aluno está pensando, visto que é uma forma interessante e eficaz, pois "o professor obtém as pistas do que ele não está compreendendo e pode interferir para auxiliá-lo" (PCN – BRASIL, p. 41).

> "Quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido. Se, por outro lado, todos os erros forem tratados da mesma maneira, assinalando-se os erros e explicando-se novamente, poderá ser útil para alguns alunos, se a explicação for suficiente para esclarecer algum tipo particular de dúvida, *mas é bem provável que outros continuarão sem compreender e sem condições de reverter a situação*" (PCN, p. 41, grifo nosso).

Sabemos que "na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto", uma vez que "quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução" (PCN – BRASIL, p. 41).

Na perspectiva do MCS a produção genuína do sujeito cognitivo se faz a leitura positiva que "trata-se de saber de que forma uma coerência se compõe na fala de uma pessoa, num livro, e assim por diante" (LINS, 2012, p. 23).

> "Diferentes fatores podem ser causa de um erro. Por exemplo, um aluno que erra o resultado da operação 126 - 39 pode não ter estabelecido uma correspondência entre os dígitos ao "armar" a conta; pode ter subtraído 6 de 9, apoiado na ideia de que na subtração se retira o número menor do número maior; pode ter colocado qualquer número como resposta por não ter compreendido o significado da operação; pode ter utilizado um procedimento aditivo ou contar errado; pode ter cometido erros de cálculo *por falta de um repertório básico"* (PCN – BRASIL, p. 41, grifo nosso).

Sob a perspectiva relacionada ao erro,

> [...] queria dar conta de caracterizar o que os alunos estavam pensando quando "erravam", mas sem recorrer a esta ideia do erro. Por exemplo, somar frações somando numeradores e somando denominadores; certamente eles não fazem isto devido a algum curto-circuito cerebral, de forma fortuita. Eles estavam pensando *em alguma coisa*, e eu queria poder tratar destas outras coisas do mesmo modo (com o mesmo referencial teórico) que as coisas "certas" (LINS, 2012, p. 11, grifo do autor).

Sobre os recursos e materiais didático-pedagógicos que o professor utiliza em sua sala de aula, é importante destacar que "todo material é fonte de informação, mas nenhum deve ser utilizado com exclusividade" (PCN – BRASIL, 1997, p. 67). Isso quer dizer que é importante haver diversidade de materiais para que os conteúdos possam ser tratados da maneira mais ampla possível.

> "O objeto "Recursos e materiais didáticos" é para nós então, um tipo particular de artefato produzido para uso instrumental em *atividades* didáticas, na sala de aula de matemática, na formação (educação) de futuros professores, enfim, para um certo contexto e nas condições históricas e sociais do meio no qual é produzido. Entendemos que junto com a linguagem eles mediam o processo de interação e o esforço de comunicação, no interior dessas *atividades* (BATHELT, 2018, p. 185, grifo do autor).

Recursos e materiais didático-pedagógicos podem ser teorizados com o MCS como resíduos de (uma) enunciação. Segundo LINS (2012) é algo para o que o leitor, se desejar, produza significado, constituindo um objeto (o objeto do leitor).

Além disso, o uso de material pedagógico não está restrito a aulas dos anos iniciais, por exemplo, há várias perspectivas sobre seu uso devido suas virtudes, uma vez que eles oferecem a possibilidade de produzir ações sobre as quais pode refletir.

Parafraseando Lins (1999), todo ser humano aprende de muitas maneiras diferentes e, por outro, porque todo conhecimento humano se manifesta de maneiras diferentes, nas diversas situações em que vivemos.

Dessa forma, variar a metodologia de ensino faz-se papel fundamental no repertório didático, pois o professor precisa agregar em suas aulas a utilização de recursos pedagógicos, jogos, materiais manipuláveis, a fim de contribuir para o aluno ter uma visão ampla do conhecimento, não ficando aprisionado apenas ao livro didático, por mais que este seja um material de forte influência na prática de ensino brasileira.

Segundo os PCN (BRASIL, 1997, p. 24) a,

> Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico.

O ensino de Matemática contribui conforme são explorados os modos que priorizem a criação de estratégias, comprovação, justificativa, argumentação, espírito crítico, que beneficiem a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia resultante do desenvolvimento, da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios.

Destaca-se a importância da busca pela inovação e abordagens diferenciadas que dinamizem os processos de ensino e aprendizagem e assim, “conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (PCN – BRASIL, 1997, p. 32).

Existem alguns caminhos para “fazer Matemática” na sala de aula. Assim “conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática” (PCN – BRASIL 1997, p. 32). Dentre elas, destaca-se o recurso à resolução de problemas, pois ao colocá-lo em foco implica ao aluno a não construção de um conceito em resposta a um problema, mas um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas.

Neste sentido, os PCN (BRASIL, 1997) considera ser um problema quando o aluno é levado a interpretar o enunciado e a estruturar a situação, que lhe é apresentada. Portanto, a resolução de problemas é “uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas” (PCN – BRASIL, 1997, p. 33).

Vale ressaltar que, usualmente, os problemas apresentados aos alunos não constituem problemas contextualizados, por vezes o que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função do seu nível de desenvolvimento intelectual e dos conhecimentos, que dispõe.

Resolver um problema não se refere em compreender a proposta e apresentar respostas aplicando procedimentos corretos, faz-se importante o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, o problema, reformular e construir conhecimentos.

> *Aprender a dar uma resposta correta*, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução (PCN – BRASIL, 1997, p. 33, grifo nosso).

Para tanto, dos objetivos gerais de Matemática para o Ensino Fundamental, destaca-se um, em particular, relacionado a levar o aluno "resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis" (PCN – BRASIL, 1997, p. 37).

> Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação (PCN – BRASIL, 1997, p. 39)..

Pararelo a isso, há uma relação com Polya (2006) que estabelece uma maneira de resolver problemas, por meio das quatro etapas, que auxiliarão chegar a um caminho assertivo para a solução.

De acordo com o PCN (BRASIL, 1997), o aluno precisa ampliar os procedimentos de cálculo ao longo do Ensino Fundamental, entre eles: cálculo mental ou escrito, exato ou aproximado, pois os diferentes procedimentos e tipos de cálculo relacionam-se e complementam-se.

Além disso, o ensino e aprendizagem de Matemática no segundo ciclo, conforme PCN (BRASIL, 1997), exige que o aluno estabeleça, a partir da sua produção de significado, outras estratégias, trabalhando com diferentes hipóteses e representações, por meio do uso de recursos didáticos. Por isso, trato da questão de repertório tanto docente quanto do aluno, visto que ensinar de outros modos pode contemplar maior número de alunos, assim como saber resolver de outros modos pode contribuir na solução de um problema.

Assim, dos objetivos de Matemática para o segundo ciclo, em relação ao desenvolvimento do aluno, tem-se:

> • Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social.
> • Resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais.
> • Ampliar os procedimentos de cálculo — mental, escrito, exato, aproximado — pelo conhecimento de regularidades dos fatos fundamentais, de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados.
> • Utilizar diferentes registros gráficos — desenhos, esquemas, escritas numéricas — como recurso para expressar ideias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados.
> • Demonstrar interesse para investigar, explorar e interpretar, em diferentes contextos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, os conceitos e procedimentos matemáticos abordados neste ciclo.
> • Vivenciar processos de resolução de problemas, percebendo que para resolvê-los é preciso compreender, propor e executar um plano de solução, verificar e comunicar a resposta (PCN – BRASIL, 1997, p. 55-56).

O segundo ciclo tem como característica geral o trabalho com atividades que permitem ao aluno desenvolver, na produção de significados constituindo objetos matemáticos, sendo "fundamental que o aluno reafirme confiança em si próprio diante da resolução de problemas, valorize suas estratégias pessoais e, também aquelas que são frutos da evolução histórica do conhecimento matemático" (PCN – BRASIL, 1997, p. 58).

2.3 As quatro etapas de Polya para resolução de problemas

Os documentos oficiais, como a BNCC, DRC/MT e os PCN, apontam que ler, escrever e resolver problemas, como competências de todas as áreas do conhecimento. De acordo com estes documentos, uma das competências fundamentais a ser desenvolvida na educação básica é a resolução de problemas.

Acredito que o problema precisa desafiar os alunos, de modo que a resposta não esteja automatizada, sendo necessário investigar possibilidades não aparentes para chegar às soluções. Para tanto, no tocante aos alunos, é preciso recursos suficientes para criar uma solução.

Diferentes estratégias pedagógicas para resolução de problemas podem oportunizar ao aluno, trabalhar em grupo, desenvolver sua autonomia, autoconfiança, comunicar-se, questionar, induzir, deduzir, fazer conexões, desenvolver heurísticas e validá-las, justificar respostas, fazer uso de materiais manipulativos e tecnológicos, como calculadoras e computadores.

Além do mais, a partir da resolução de problemas o professor pode proporcionar aos seus alunos momentos de reflexão e aperfeiçoamento no processo de produção de significado, uma vez que para Polya (2006), é pela interação dos indivíduos com o conhecimento construído, que se dá a consolidação dele.

Nos currículos de Matemática, os problemas ocuparam lugar de destaque. Contudo, vistos como aplicação de conteúdos e algoritmos ensinados, como motivação, atividade lúdica, e, ferramenta para promover o desenvolvimento do raciocínio. Para Polya (2006) a capacidade de resolver problemas é saber fazer em Matemática. Segundo ele, é pela utilização de problemas do cotidiano e pela organização de diferentes estratégias de resolução de problemas que o aluno produz significado.

Polya (2006) descreve que a resolução de problemas dispõe de quatro etapas diferentes, são elas: i) a compreensão do problema; ii) o estabelecimento de um plano; iii) a execução do plano e:iv) a reflexão sobre a estratégia de resolução adotada.

Para facilitar o entendimento de cada etapa, foi elaborado o seguinte quadro:

Quadro 1. As quatro etapas de Polya para a resolução de problemas.

Compreensão do Problema	**Estabelecer um Plano**	**Execução do Plano**	**Retrospecto**
Ler o problema com clareza, procurando compreender a situação-problema e desejar resolvê-la.	Buscar por uma estratégia que leve à solução do problema.	Colocar em prática seu plano justificando sua(s) estratégia(s).	Verificar erros em cada passo que foi utilizado como de cálculos e da escolha da estratégia.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Vale enfatizar a importância de cada uma destas etapas por serem relevantes. Uma complementa a outra, pois não basta que o aluno obtenha o resultado matemático correto, sem que ele produza uma justificativa plausível para a atividade.

Diante disso, é possível compreender que numa aula de resolução de problemas, o problema é o ponto de partida para desenvolver matemática. Para isto, o professor apresenta um problema; sugere um tempo aos alunos para elaborarem suas estratégias ou técnicas de resolução, com os conhecimentos que já possuem, e, caso perceba especificidades nos alunos, ajudar o aluno com discrição e naturalidade. Volta-se ao problema, discutindo a sua resolução e o(s) conteúdo(s) apresentado(s).

Ao ler as literaturas de Lins (1999, 2001, 2004, 2012) e Polya (2006), que são textos produzidos em épocas diferentes, pude observar a importância de algumas técnicas pedagógicas que me conduziram a olhar para os dois autores numa perspectiva de olhar e fazer leitura dos meus alunos, como diz Polya (2006, p. 1) “o professor deve colocar-se no lugar do aluno [...] procurar compreender o que se passa em sua cabeça”.).

Na perspectiva do MCS o professor precisa “ler” o aluno. Parafraseando Lins (1999, 2012), o professor precisa aprender a ler o aluno e, portanto, pensar enquanto o aluno, fala em qual lugar aquilo que ele está dizendo faz sentido. Nessa perspectiva, “ler” sons de voz, expressões corporais, gestos, rabiscos, palavras e enunciações. Ele em si mesmo pode ser entendido como um resíduo de enunciação, daquele sujeito cognitivo, o aluno.

De acordo com os estudos de Vigotski (2009, p. 455), é possível, “exprimir todos os pensamentos, sensações e até reflexões profundas com uma palavra. Isto é possível quando a entonação transmite o contexto psicológico interior do falante, o único no qual é possível que a palavra conscientizada seja entendida”.

De acordo com Polya (2006, p. 3),

> Há dois objetivos que o professor pode ter em vista ao dirigir a seus alunos uma indagação ou uma sugestão de um problema: primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que ele é apresentado; segundo, quando desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio.

Polya (2006, p. 4) afirma que “o professor que deseja desenvolver nos estudantes a capacidade de resolver problemas devem incutir em suas mentes algum interesse por problemas e proporcionar-lhes muitas oportunidades de imitar e de praticar”.

O MCS reconhece nas palavras de Lins a importância da imitação, e do praticar para a aprendizagem, uma vez que, esta é usada de forma intencional nos processos pelos quais um sujeito vai se tornando, cada vez mais parte das práticas de uma cultura.

> A Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky, por exemplo, pode ser explicada, nos termos do MCS: o processo no qual a pessoa passa de ser capaz de fazer algo com a ajuda/presença de uma pessoa mais "experiente", para ser capaz de fazer aquele algo "sozinho", é o processo no qual a pessoa passa de "precisar emprestar a legitimidade de um terceiro para poder dizer o que diz naquele lugar e momento", para "fazer de maneira autônoma por ter internalizado interlocutores, legitimidades" (é melhor ainda dizer "por ter sido internalizado por interlocutores, legitimidades") (LINS, 2012, p. 20).

Nas lentes de Vigotski (1987), os sujeitos nascem com a capacidade de fazer as coisas, portanto, agir. Contudo, o início rudimentar e a naturalização de uma *atividade*, no ambiente escolar requerem um tempo de prática do aluno, sendo esta acompanhada pelo professor, que possibilitará ao aluno fazer na direção correta e, é nesse momento que precisam (professor e aluno) de diálogo e comunicação.

Nesse contexto, avaliamos a importância de pensar os modos de trabalhar resolução de problemas, conhecer outras estratégias, e, principalmente, verificar se o aluno compreendeu o problema, cumpriu e verificou as etapas, pois "muitos dos melhores efeitos podem ficar perdidos se ele deixar de reexaminar e de reconsiderar a solução completa" (POLYA, 2006, p. 5).

Dessa forma, entendo que a resolução de problemas está inteiramente ligada à produção de significados a partir das hipóteses, sendo que o uso da estratégia Modelo de Barras o aluno, consegue fazer uma produção heurística, ou seja, fazer suas descobertas; pode ser inventor e ao mesmo tempo descobridor de respostas findadas de forma autônoma e criativa.

Acredito que seja importante, antes de tentar resolver o problema, identificar qual é o tipo de problema, pois a probabilidade de compreender os dados será maior, facilitando a busca de uma estratégia assertiva para resolução do problema. Por exemplo, um problema tipo parte-todo, o aluno será induzido a perceber que se trata de operações que envolvam o objeto 'frações', sendo o Modelo de Barras responsável pela visualização dos dados do problema, capacitando o sujeito a utilizar outras habilidades, para sua construção criativa de resolução.

Resolver problema na perspectiva do MCS é atribuir significado a um resíduo de enunciação ao qual me deparo e, resolver é assumir o desafio de responder à pergunta, que imagino o autor do problema ter proposto.

2.3.1 Tipos de problemas

O recurso Modelo de Barras pode ser utilizado em todas as formas de cálculo matemático, contudo nos anos iniciais começa a ser ensinado em adições e subtrações, e conforme o progresso no nível de ensino, aumenta o nível de dificuldade. Assim, o recurso Modelo de Barras é ensinado do todo para a parte, ou em forma de comparação.

Os problemas matemáticos escolares, em geral, podem ser classificados em parte-todo, comparação e antes-depois.

A relação parte-todo se caracteriza pela ideia de um inteiro, que pode ser uma grandeza discreta ou contínua, em que as partes desse inteiro são associadas ao conceito de uma fração.

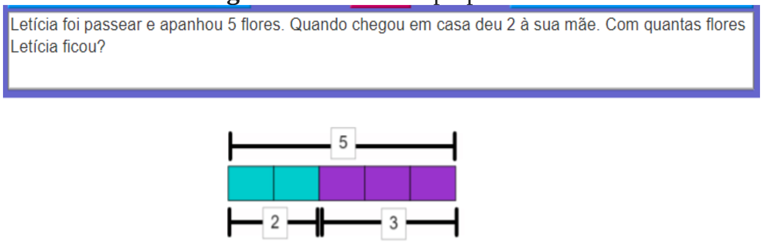
A melhor forma de compreender o significado parte-todo é a partir de situações-problemas, ou de um contexto em que essa relação se faz presente. Espera-se que o aluno compreenda que as partes podem ser trocadas na modelagem sem alterar os dados do problema.

Nas figuras seguintes (Figura 1 e 2) é apresentado o recurso Modelo de Barras nas duas formas de como pode ser usado, do todo para a parte, este chamaremos de parte-todo e comparação.

Em relação ao tipo de problema parte-todo indica certo número de partes iguais que se compõem um todo. A noção de todo é o centro para uma boa compreensão do conceito de fração, dos números em sistemas de numeração decimal, nas quatro operações fundamentais da matemática e em frações, enfatizando a representação com barras, comumente adotada para resolução de problemas aritméticos.

O modelo parte-todo é desenvolvido quando temos uma soma, inicia-se modelando uma barra, com o número de partes equivalente ao da primeira parte e, em seguida, procedemos da mesma forma para a segunda parte. O número de partes total dará o resultado da soma.

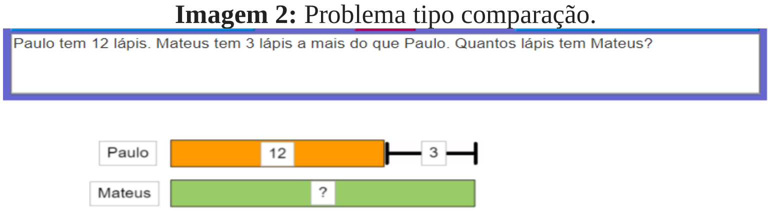
Imagem 1: Problema tipo parte-todo.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

No caso do modelo de comparação, é modelada uma barra maior separada das outras, ou seja, na subtração é modelada a barra do aditivo e por baixo desta a do subtrativo. Desta forma o que sobrar ao comparar uma com a outra será o resultado, a diferença.

Imagem 2: Problema tipo comparação.

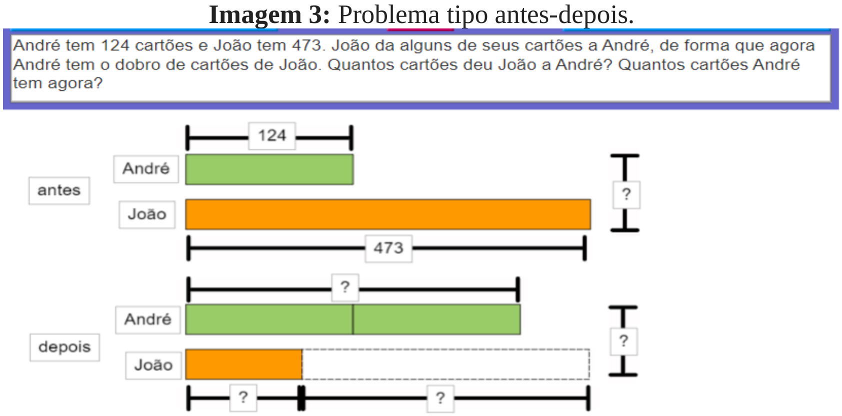


Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

No que se trata do tipo de problema comparação, temos como exemplo, problemas que envolvem operações de adição ou subtração. Logo, a barra maior é sempre desenhada separada da outra, em uma é desenhada a barra do aditivo e por baixo dela o subtrativo, sendo o resultado, a comparação de uma com a outra, ou seja, a diferença.

O modelo antes-depois se aplica quando a situação, a que se refere o enunciado do problema, implica um estado anterior e um posterior, dando alguns dados em ambos estados.

Imagem 3: Problema tipo antes-depois.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Nos problemas tipo antes-depois, aplica quando a situação, que se refere o enunciado do problema, implica em estado anterior e posterior, fornecendo alguns dados, em ambos os estados.

Assim, o modelo é aplicado quando os dados do enunciado do problema nos permitem deduzir duas direções de produção. Este modelo, pouco diferente do modelo de comparação, diferencia-se deste pelo fato de anunciar dados de apenas um sujeito.

Portanto, para resolver um problema é imprescindível compreender o tipo de problema, uma vez que facilita a modelagem das barras e, assim, oferece ao aluno uma representação da situação, que evite a confusão semântica.

2.4 Modelo de Barras

O Modelo de Barras é um recurso que permite a aprendizagem matemática já nos primeiros anos escolares. Este método possibilita aos alunos modelar barras que representam relações entre a parte e o todo dos problemas. Em outras palavras, ao desenharem as barras, os alunos visualizam aquilo que lhes é pedido de forma escrita nos problemas, desta forma transformam o conhecimento implícito em conhecimento explícito, isto é, possibilita a produção de significado.

O aluno precisa ter acesso aos conhecimentos e métodos matemáticos, desde o início da vida escolar, de forma prazerosa, subsidiado por um repertório de ensinamentos criativos, para que consiga resolver problemas no decorrer de sua vida. Pensando nisso, Abreu (2017) sustenta que a Matemática pode contribuir na formação do aluno, a fim de que este possa interpretar e tomar decisões em diversas situações da sua vida pessoal e social.

De acordo com Simões (2015), o ensino e aprendizagem da Matemática nos anos iniciais, devem ser realizados por meio do que o aluno observa, considera e deve prepará-lo para fatos do entendimento matemático e assim, preestabelecer a capacidade deste em operacionalizar abstratamente.

Em virtude do que foi mencionado, sabemos que não há uma prescrição para ensinar, nem um modelo global de ensino para a Matemática. Porém, "a expansão deste método noutros países, como é o caso dos Estados Unidos da América e do Reino Unido" (ABREU, 2017, p. 19), vêm se destacando nas avaliações que comparam a qualificação do ensino, como o PISA, por adaptarem o modelo de barras como uma estratégia para resolver problemas.

Nesse sentido, Lima *et al.* (2017, p. 26) consideram o modelo sugerido como “uma das muitas estratégias que os alunos de Singapura aprendem aplicar na resolução de problemas de Matemática”. De acordo com Arêde e Silva (2016, p. 10), o modelo citado “é um método que permite a aprendizagem da matemática, e não apenas a sua memorização”. O modelo preconizado é considerado como “uma metodologia de ensino presente nos livros didáticos de Singapura” (QUEIROZ, 2014, p. 15).

O Modelo de Barras em sua essência é um recurso pedagógico que ensina, por meio de um processo da apreensão perceptiva, que visa à visualização, raciocínio e construção de multiestratégias com os dados do enunciado de um problema. Assim, possibilita que o aluno estimule o raciocínio mental mais objetivo, nas operações cognitivas e nos processos figurais.

Os pesquisadores (CINTRA, 2017; QUEIROZ, 2014; PORTO, COSTA, 2018; LIMA et al., 2017; SAJNIM, ALMEIDA, 2017; MALTA, LOPES, 2018; ARÊDE e SILVA, 2016; SANTOS, 2019; ABREU, 2017; GOIS, 2014; DOTTI, 2016) destacam que os resultados satisfatórios do recurso modelo de barras se devem ao uso da abordagem “concreto - pictórico - abstrato” – CPA –, pois este procedimento promove maior processo mental entre o modo de pensar e o de resolver problemas matemáticos na escola.

O objetivo da abordagem CPA é proporcionar ao aluno a capacidade de resolver problemas matemáticos com agilidade, usando diferentes técnicas, “explorando a sua própria forma de pensar, em vez do pensar mecânico, por receita ou memorização” (CABRAL, 2015, p. 2). Para Arêde e Silva (2016, p. 9) “o modelo em estudo permite que a matemática chegue a todos os alunos tendo sempre em conta as dificuldades que cada um apresenta”, visto que, também, permite trabalhar um problema com diferentes abordagens.

A partir dos textos consultados, notou-se que nos livros didáticos e materiais apostilados adotados no Brasil já apresentam sugestões de uso do recurso modelo de barras para ensinar a resolver problemas. No entanto, isso ainda não é uma prática incentivada, ou adotada, pelos docentes no trabalho de sala de aula. “Na literatura brasileira, podemos encontrar exemplos de proposta de ensino por meio de visualização pictórica de vários autores, corroborando a ideia de que esta estratégia de ensino é bastante natural” (QUEIROZ, 2014, p. 40).

Na bibliografia consultada, o recurso modelo de barras aparece articulado com outras temáticas de investigação, como ensino de frações (SANTOS, 2019; CINTRA, 2017; GOIS, 2014), pré-álgebra e álgebra (QUEIROZ, 2014; DOTTI, 2016), adição e subtração (LIMA *et al.*, 2017; ARÊDE; SILVA, 2016), gestão de materiais pedagógicos (ABREU, 2017), em todos os níveis da educação formal ou ainda informal. Nota-se, ainda que, de forma menos incisiva, à preocupação em evidenciar orientações para avaliar as aprendizagens dos alunos, bem como a própria abordagem curricular baseada no modelo de barras.

Nas pesquisas realizadas por professores de Matemática que estavam em sala de aula nos anos iniciais (DOTTI, 2016; ARÊDE e SILVA, 2016; ABREU, 2017) e anos finais (QUEIROZ, 2014; GOIS, 2014; SANTOS, 2019) mostraram que em nenhum momento tiveram contato com o modelo de barras antes da pesquisa e, para isso, foi preciso realizar um estudo prévio do método, a fim de que se adequassem à nova estratégia pedagógica. Os autores, majoritariamente, adotaram perspectivas investigativas de pesquisa participante, reflexão sobre a própria prática, com objetivos de organizar os processos de ensino e de aprendizagem de forma contextualizada e significativa para os alunos.

Ademais, as pesquisas demonstraram que após a aplicação do recurso modelo de barras e, também, com a utilização de recursos e materiais pedagógicos, "[...] barras de chocolate, lego, folha de papel ofício, bolinhas de gude ou objetos construídos intencionalmente [...]" (SANTOS, 2019, p. 29), no desenvolvimento das atividades, os alunos que antes apresentavam grandes dificuldades de aprendizagem e compreensão, desta feita, obtiveram êxito nas atividades de resolução de problemas matemáticos.

Os trabalhos relacionados à formação de professores (LIMA et al., 2017; SAJNIM, ALMEIDA, 2017; MALTA, LOPES, 2018), apontam que o professor precisa dialogar com os alunos e encorajá-los a apresentar exemplos concretos, isto é, o professor precisa mediar o conhecimento utilizando diferentes estratégias pedagógicas para ensinar Matemática com a utilização de materiais manipuláveis, sendo uma das vantagens do recurso modelo de barras. Os autores validam o potencial do modelo de barras como uma estratégia pedagógica para o ensino de Matemática que se mostra uma excelente ferramenta, para auxiliar o processo de generalização do pensamento matemático, para amparar o ensino e a aprendizagem de resolução de problemas.

Num trabalho de revisão bibliográfica (CABRAL, 2015), os conceitos trabalhados com o recurso Modelo de Barras são amplos e enriquecedores, o aluno é incentivado a seguir a sua linha de raciocínio por meio do grafismo e a representação abstrata, uma vez que, resolver problemas utilizando o recurso demanda menos tempo e minimiza os aspectos competitivos dos alunos, desenvolvendo competências sociais através do diálogo e confronto de ideias.

Por fim, (PORTO; COSTA, 2018) em uma pesquisa de formação continuada sobre Resolução de Problemas e o Modelo de Barras concluem que os cursos de formação continuada devem criar estratégias pedagógicas e outras metodologias de ensino para a Matemática, para que os professores possam modificar, rever e analisar a própria prática, bem como a maioria dos professores participantes reconheceu a necessidade de ensinar a Matemática de forma diferente da que aprenderam, isto é, reconstrução da prática. Assim, o recurso Modelo de Barras tem potencial para amenizar a ansiedade dos alunos em encontrar de forma mais precisa a solução dos problemas matemáticos, fazendo-os refletir com calma e atenciosamente sobre os dados do problema matemático.

Diante da revisão bibliográfica, pode-se inferir no desenvolvimento apresentado que o recurso Modelo de Barras consiste em uma estratégia pedagógica para resolução de problemas matemáticos e, tem levado muitos países adotá-lo, no seu sistema educativo este método descomplicado e cheio de multimodalidades.

Percebe-se que as discussões levantadas permitem compreender e explicar a importância do recurso modelo de barras para resolver problemas matemáticos, porém alvos potenciais de estudos, que são as opiniões dos professores, ficam implícitos nos textos, deixando aflorar expectativas que não são apresentadas.

2.5 O produto Educacional (PE)

Ao ingressar no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM), passei a conhecer e estudar o Modelo de Barras aplicados à resolução de problemas matemáticos. Antes do mestrado e trabalhando com resolução de problemas, não tinha o olhar para as diferentes estratégias pedagógicas de resolução de problemas, aos tipos de problemas e sua importância no cenário de ensino e de aprendizagem, dessa área da Matemática.

Nesse contexto, e para atingir o objetivo de analisar os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras, no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas apresentei um curso de extensão, a partir de um conjunto de atividades elaboradas que inicialmente serviram como versão preliminar para a elaboração do produto educacional, cujo objetivo é servir como material de apoio aos professores que ensinam matemática no 4º, 5º e 6º anos, do Ensino Fundamental.

Para isso, precisei dedicar ao estudo: compreender e aprender usar o recurso Modelo de Barras no processo de resolução de problemas, além de participar assiduamente de grupo de estudos e orientações para a conexão das ideias de como iria desenvolver a ação formativa: curso e grupo de trabalho.

Tenho a fase de elaboração do produto educacional como o maior desafio durante o mestrado, pois a partir dela percebi as mudanças na minha postura docente e, principalmente, no modo como resolvia e como aumentaram as possibilidades de usar outros modos de resolver problemas hoje. Foi uma fase de muitas ideias, também de inviabilidades como a aplicação de todos os problemas do produto educacional no curso, isso porque o prazo necessariamente demandava ser maior, bem como resolver os problemas com os professores utilizando o aplicativo Thinking Blocks[1] e objetivando uma devolutiva sobre o uso ou não do Modelo de Barras que os professores do GT adaptassem e aplicassem os problemas do PE, com seus alunos.

O produto educacional intitulado "MODELO DE BARRAS Disparador de multiestratégias pedagógicas para resolução de problemas" (Apêndice 1), está organizado em: Apresentação; Informação ao Professor; Introdução, Coleção de problemas para desenvolver atividades em sala de aula referentes ao Modelo de Barras como disparador de multiestratégias de resolução de problemas matemáticos; Considerações Finais, Atividades complementares e Ficha Avaliativa.

A coleção de problemas que compõe o produto educacional está organizada em três blocos, com cinco problemas cada, referentes aos tipos de problemas: problemas do tipo parte-todo, comparação e antes-depois.

Os problemas foram elaborados conforme o nível de complexidade e o pensamento matemático como o algébrico. Além disso, cada problema foi desenvolvido a partir das etapas de Polya e apresenta resolução por meio da modelagem com barras e, seguidamente, os encaminhamentos das multiestratégias pedagógicas.

[1] Ferramenta de modelagem com uma lousa interativa, para demonstrações de problemas personalizados com palavras. Disponível em https://www.mathplayground.com/thinking_blocks_modeling_tool/index.html.

As multiestratégias pedagógicas são apresentadas no produto educacional, de acordo com a abordagem CPA, assim alguns problemas apresentam soluções, com uso de materiais e recursos pedagógicos, como materiais concretos, ábaco, material dourado.

A atividade do curso se deu com a aplicação de 10 (dez) problemas, sendo que 2 (dois) destes eram iguais, o problema inicial e o problema final: Aquário, ambos serviram como aferição de conhecimento a *priori* e a *posteriori* sobre o uso ou não do recurso Modelo de Barras, para resolver problemas.

Apresento no Quadro 2, a sequência dos problemas selecionados para a aplicação no curso.

Quadro 2. Sequência dos problemas selecionados para o curso.

Problema Inicial – Aquário: Em um grande aquário um quarto dos peixes são dourados. Há 4 pintados a mais do que dourados no aquário. Os 16 peixes restantes são tucunarés. Quantos peixes existem no aquário?
Problema 2 - Sala de aula de Carlos: Na sala de aula de Carlos, dois quintos dos alunos são meninos. Há 12 meninos na sala. Quantas meninas há na sala de aula? Quantos alunos há na sala de aula?
Problema 3 - Buquê de flores: Mônica fez um buquê com 24 flores, 1/3 são rosas e o resto são tulipas. Qual a quantidade de rosas e quantidade tulipas que Mônica colocou no buquê?
Problema 4 - Alunos do 4º Ano: Três quintos dos alunos no 4º ano A e três quartos dos alunos no 4º ano B são meninas. Ambas as turmas têm o mesmo número de meninas e o 4º ano A tem 8 meninos a mais do que o 4º ano B. Quantos alunos têm no 4º ano A?
Problema 5 - Jogo de cartas: Todos os fins de semana a família Ferrari, primos e primas, se reúnem para jogar cartas, ganha o trio que fizer mais pontos. Na última jogada, foram fazer a somatória das cartas, constaram que Suzana fez 39 pontos a mais do que Mariana. Mariana fez 18 pontos a mais do que Luíza. Ao todo fizeram 261 pontos. Quantos pontos cada uma fez?
Problema 6 - Cartas de Antônio e Marcos: Antônio e Marcos são amigos desde a infância. Os amigos gostam de colecionar cartas. Antônio tinha metade das cartas de Marcos. Depois que Antônio deu 36 cartas a Marcos, o amigo ficou com 3 vezes mais cartas que ele. Quantas cartas eles têm agora?
Problema 7 - Pés de codorna e coelho: Na fazendinha de uma escola de Sinop há aves e animais. Uma professora levou seus alunos para contarem a quantidade de codornas e os coelhos. Eles contaram 16 cabeças e 42 pés ao todo. Quantas codornas e coelhos têm na fazendinha da escola?
Problema 8 - Tanque de combustível: Stela gastou três quintos do tanque de combustível e precisou colocar 36 litros para completá-lo antes de enchê-lo. Quantos litros de combustível restavam no tanque?
Problema 9 - Fábrica de máscaras: Em uma fábrica de máscaras em Sinop tinha 750 unidades no estoque. Na segunda-feira foram confeccionadas 350 máscaras. Na terça-feira foram confeccionadas três vezes a quantidade da segunda-feira. Na quarta-feira foram doadas ao pronto socorro da cidade 1500 máscaras. Quantas máscaras restaram no estoque da fábrica?
Problema Final – Aquário: Em um grande aquário um quarto dos peixes são dourados. Há 4 pintados a mais do que dourados no aquário. Os 16 peixes restantes são tucunarés. Quantos peixes existem no aquário?

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

A escolha dos problemas (Quadro 6) foi organizada pelos tipos de problemas, parte-todo, comparação, antes-depois, e, numa ordem em que o nível de complexidade fosse desenvolvido à medida que eram aplicados.

Os problemas foram pensados e elaborados com três propósitos: i) saber a opinião dos professores se seria possível aplicar os problemas em sua sala de aula; ii) com relação aos tipos de problemas quais outras estratégias surgiriam para contribuir nos encaminhamentos do livro; e iii) chamar a atenção dos professores que ensinam Matemática que ampliar seu repertório docente é importante no processo de ensino, uma vez que todos os alunos são diferentes em uma sala de aula, pois aprender requer entendimento e, por vezes, seja preciso conhecer outros modos de fazer/resolver para ensinar, considerando que todos tem direito de aprender.

A escolha dos problemas se deu a fim de permitir um espaço comunicativo que abrisse o leque de possibilidades aos docentes para que pudessem ampliar seu repertório de ensinar, se posicionando e até adaptando quanto aos problemas, conforme as necessidades ou especificidades da sua turma.

O produto educacional pode ser acessado no Portal da UFMT, https://www.ufmt.br/curso/ppgecm/pagina/sobre-o-ppgecm/3692 e alguns exemplares impressos estão na Oficina de Matemática, do Campus Universitário de Sinop. Cada educador participante da pesquisa recebeu um livro para que possa lê-lo, consultá-lo, grifá-lo, fazer suas anotações e utilizá-lo como subsídio na formulação de atividades em sua escola.

2.6 Efeitos a *priori* do modelo de barras

Por meio de análise de trabalhos que selecionei para a construção teórica do uso do Modelo de Barras, aplicado no ensino da Matemática, percebi que a maioria apresentava apenas experiências com alunos dos primeiros e últimos anos do Ensino Fundamental, por isso, deparei-me com uma lacuna entre o 4º à 6º anos, que despertou meu interesse de investigação, em saber quais seriam os efeitos do Modelo de Barras, no desenvolvimento profissional dos professores que ensinam Matemática, no segundo ciclo do Ensino Fundamental.

Dessa forma, fiz um levantamento e uma revisão do conhecimento produzido sobre o Modelo de Barras. Esses trabalhos desencadearam um processo de análise qualitativa dos estudos produzidos na área de conhecimento matemático.

A caracterização dos periódicos analisados e identificação dos artigos estão elencadas no quadro a seguir.

Quadro 3 – Caracterização dos periódicos analisados e identificação dos artigos

	Tipo de trabalho científico	**Ano**	**Instituição de Ensino Superior**	**Título e Autor**	**Bases de Dados para consulta**
1	Dissertação	2019	Universidade Federal de Alagoas	**Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de Singapura**. Jose Carlos Medeiros dos Santos	Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES
2	Dissertação (Relatório de estágio)	2017	Universidade dos Açores	**Construção e gestão de materiais pedagógicos no ensino da matemática: uma adaptação do Método de Singapura no contexto da Educação Pré-Escolar e do 1.º Ciclo do Ensino Básico.** João Cristiano Figueira Abreu	Repositório da Universidade dos Açores
3	Dissertação (Relatório de estágio)	2016	Instituto Superior de Educação e Ciências - ISEC	**Uma perspectiva sobre a abordagem dos números na educação pré-escolar nos manuais escolares em singapura.** Lúcia de Jesus Messias Simões	Repositório Comum
4	Artigo	2018	Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA	**A Resolução de Problemas pelo Método Pictórico.** Gláucia Helena Malta; Sérgio Augusto Lopes	2° Simpósio de Formação do Professor de Matemática da Região Norte – PROFMAT - profmat-sbm
5	Artigo (Oficina de Projeto Fundão)	2017	Instituto de Matemática da Universidade do Rio de Janeiro - UFRJ	**A Representação pictórica na resolução de problemas: explorando o modelo de barras.** Camila Sajnim; Luiz Felipe Almeida	Bienal de Matemática Rio de janeiro
6	Artigo	2015	Universidade dos Açores	**O método Kumon versus método de Singapura no ensino da Matemática.** João Cabral	Researchgate
7	Dissertação	2014	Universidade Federal de São Carlos - UFSCar	**Resolução de problemas da pré-álgebra e álgebra para fundamental II do ensino básico com auxílio do modelo de barras.** Jonas Marques dos Santos Queiroz	Repositório Institucional UFSCar
8	Dissertação	2017	Universidade Federal de São Carlos - UFSCar	**Proposta para o ensino de frações para o 7o ano: do diagnóstico a aprendizagem mediada por modelo de barras.** Camila Coppi Cintra	Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Plataforma Sucupira)
9	Dissertação	2014	Universidade Federal de São	**O efeito do material concreto e do modelo de barras no processo de**	Catálogo de Teses e Dissertações da

			Carlos - UFSCar	**aprendizagem significativa do conteúdo curricular de frações pelos alunos de 7º ano do ensino fundamental.** Renata Claudia Gois	CAPES (Plataforma Sucupira)
10	TCC	2016	Universidade Federal de São Carlos - UFSCar	**Fundamentação da Álgebra no Ensino Fundamental I Ciclo.** Tamara Garcia Pinheiro Dotti	Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Plataforma Sucupira)
11	Dissertação	2016	Instituto Superior de Educação e Ciências – ISEC Lisboa	**Resolução de Problemas e o Método da Barra:** Um estudo com alunos do 1.º ano de escolaridade**.** Sofia Beloto Arêde e Silva	Repositório Comum
12	Artigo	2017	Universidade dos Açores	A Resolução de Problemas no 2.º ano de escolaridade: uma sequencia de aprendizagem do modelo de barras**.** Ana Maria Lima, Carlos Pereira dos Santos, Conceição Lima Vaz, Ricardo Cunha Teixeira	Revista - O *Jornal das Primeiras Matemáticas – Número 8*
13	Dissertação	2015	Universidade Anhanguera de São Paulo	**A Inserção da Resolução de Problemas na Prática Docente de uma Professora de Matemática.** Simone Cristina do Amaral Porto	Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (Plataforma Sucupira)
14	Artigo	2018	Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires	**El método Singapur, propuesta para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas en Primaria /O método de Singapura, uma proposta para melhorar o aprendizado de Matemática no ensino fundamental.** Maria del Rocio Juárez Eugenio, Maria Anabell Aguilar Zaldívar	Repositório Digital de Documentos EnEducación Matemática
15	Artigo	2016	Universidade Camilo José Cela	**O modelo de barra uma estratégia para resolver problemas de sentença.** Sergio Urbano Ruiz; José Antonio Fernández Bravo; Pilar Fernández Palop	Revista internacional de aprendizagem em ciências, matemática e tecnologia - Dialnet
16	Artigo	2015	Universidade dos Açores	**Matemática na educação pré-escolar: Esquemas todo-partes.** Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira	Revista - O *Jornal das Primeiras Matemáticas – Número 4*

17	Artigo	2019	Universidade dos Açores	**Os Princípios Orientadores do Método de Singapura e a Aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico.** Raquel Dinis, Ricardo Cunha Teixeira, Sónia Pacheco	Revista - O *Jornal das Primeiras Matemáticas – Número 13*

Fonte: Elaborado pela autora.

Pelos resultados descritos no desenvolvimento da investigação, evidenciei alguns efeitos a *priori* com relação ao uso do recurso Modelo de Barras, sendo apontado pela maioria dos pesquisadores como uma metodologia de ensino capaz de alcançar resultados significativos, quanto à aprendizagem da Matemática, especificamente para a resolução de problemas matemáticos cujo interesse na pesquisa.

Outro fato importante, exposto resumidamente de todos os trabalhos abordados, é que não existe um modo que resolva todos os tipos de problemas, mas apontam multimodalidades para chegar a um determinado resultado de um problema, assim a partir deste exposto, considerarei o Modelo de Barras como um disparador para falar, pensar e exercitar diferentes estratégias para resolver um problema, isto é, tratar de multiestratégias de resolução de problemas matemáticos.

A partir do olhar voltado para formação continuada da prática docente, poucas pesquisas mostraram os possíveis efeitos do Modelo de Barras para as práticas pedagógicas. Sendo assim, tido como uma necessidade de ampliar os estudos de descrição, análise e avaliação da produção, na área de formação de professores de matemática, com relação aos possíveis efeitos do Modelo de Barras.

Faz-se útil levar em consideração também que o desenvolvimento do produto educacional, junto aos professores e o confronto das análises, a *priori* e a *posteriori*, junto às considerações pertinentes aos problemas constituem a fase da validação.

2.7 Hipóteses de possíveis efeitos a *posteriori* do modelo de barras

Com base na pesquisa proposta, procurei constituir um espaço comunicativo, um ambiente em que todos os professores que ensinam matemática pudessem falar e produzir significado, sinalizando possíveis efeitos do uso do Modelo de Barras.

Assim, elenquei algumas hipóteses de possíveis efeitos do Modelo de Barras a *posteriori* da ação formativa, são elas:

- Alteração da forma dos professores resolverem problemas matemáticos;
- Sentir mais segurança para trabalhar com resolução de problemas matemáticos;
- Possibilidade de continuar aplicando o Modelo de Barras, em sua sala de aula;
- Contribuição para identificar mais oportunidades de usar materiais e recursos manipuláveis, como Ábaco, Frac-Soma, Régua de Cuisenaire e Material Dourado, em sua sala de aula;
- Adequação e elaboração de problemas, a partir do livro didático usado na escola, de acordo com as prescrições da BNCC;
- Alteração na forma que os alunos resolvem problemas matemáticos;
- Melhoria dos alunos na leitura e compreensão dos problemas matemáticos;
- Alteração da forma dos professores ensinarem resolução de problemas matemáticos;
- Persistência do aluno em buscar uma solução para o problema matemático;
- Modificação do professor ao avaliar o aluno em suas soluções;
- Mudança da dinâmica da turma e das aulas;
- Interesse por parte dos alunos em aprender matemática;
- Contribuir para trabalhar de forma inclusiva ou com sala heterogênea;
- Dificuldades enfrentadas para implementar o Modelo de Barras, em sua turma.

SEÇÃO III

3 AÇÃO FORMATIVA

Esta seção tem por objetivo apresentar as etapas da Ação Formativa – Curso sobre o Modelo de Barras e Grupo de Trabalho. Partindo da fase de aplicação, validação e revisão do produto educacional, apresento os possíveis indicativos de efeitos do uso do Modelo de Barras nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas, com base nos dados produzidos nos encontros do curso e do GT.

3.1 Algumas ideias do modelo dos campos semânticos a partir da aplicação dos problemas na primeira etapa da ação formativa - o curso

À luz do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), abordei algumas ideias pertinentes a partir das enunciações dos professores na primeira etapa da Ação Formativa (AF), o curso sobre o Modelo de Barras, por meio da aplicação de problemas matemáticos, em curso de formação de professores que ensinam matemática.

Entendo ser possível fazer leitura plausível dos resíduos de enunciação dos participantes da pesquisa, que constituiu um *espaço comunicativo*, o qual procurei saber de que direção falam e porque falam. O Modelo de Barras é um recurso, ou seja, é um resíduo de enunciação o qual fiz uma leitura daquilo que deparei diante da ação formativa.

O curso apresentado ocorreu em dois encontros com pedagogas e um pedagogo que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No primeiro encontro priorizei a aplicação dos problemas, tipo parte-todo e comparação, no segundo encontro foram aplicados os problemas do tipo antes-depois, e, por último, a formação do grupo de trabalho.

A iniciação do curso se deu com apresentação da equipe responsável pelo curso, o professor orientador Dr. Edson Pereira Barbosa, a pesquisadora e uma colega de mestrado cuja pesquisa também é a respeito dos efeitos do uso do Modelo de Barras, contudo voltada para o ensino de álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental.

Vale ressaltar que nos encontros foram lidos e assinados os protocolos de segurança (Anexo 3) referentes à COVID-19. Em seguida, foi entregue a cada participante seu caderno de registros, da qual a capa é identificada pela imagem de uma árvore, esta considerada o Nickname[2] a fim de garantir o sigilo dos participantes, sendo que a entrega se deu de forma aleatória.

Figura 1. Cadernos de registro dos sujeitos de pesquisa.

Fonte: Dados de pesquisa.

Os professores foram identificados por: Acácia, Angico, Araticum, Aroeira, Baru, Itaúba, Jacarandá, Jatobá, Jenipapo, Jequitibá, Mogno, Palmeira, Sibipiruna e Tarumã.

Antes da aplicação do problema inicial, convidei os professores para responderem o questionário inicial (Anexo 3), contido no interior do caderno com o intuito de conhecer o histórico de cada professor, bem como a produção de dados para análise, sendo aceito e respondido por todos.

A análise dos resíduos de enunciações dos sujeitos da pesquisa, produzida na aplicação do questionário inicial, foi realizada com o intuito de aproximar os professores, sabendo quem são.

3.1.1 Aplicação e análise do questionário inicial

Para melhor entendimento sobre os resíduos produzidos pelos professores no questionário, o estudo utilizou quadros e nuvem de palavras para melhor visualização. Apresento a seguir as principais questões elencadas com suas devidas análises.

Na questão 4, perguntei aos professores para descreverem brevemente há quanto tempo atuam como professor e em quais ciclos (anos), conforme destacado no Quadro 1.

[2] Codinomes dos professores participantes da pesquisa.

Verificou-se que de 14 professores, 6 atuam mais de 15 anos no 1º e 2º ciclos, 2 atuam em todos os ciclos mais de 15 anos, 2 atuam menos de 15 anos no 1º e 2º ciclos, apenas 1 atua mais de 30 anos no 1º ciclo, os demais atuam menos de 5 anos, sendo que 1 atua no 1º e 2º ciclos, 1 no 2º ciclo e 1 no AEE.

Quadro 4: Questão 4: Descreva brevemente há quanto tempo atua como professor e em quais ciclos (anos).

Quantidade de sujeitos	Tempo de atuação	Ciclos (anos)
2	mais de 15 anos	Todos
1	mais de 30 anos	1º ciclo
6	mais de 15 anos	1º e 2º ciclos
2	menos de 15 anos	1º e 2º ciclos
1	menos de 5 anos	1º e 2º ciclos
1	menos de 5 anos	2º ciclo
1	menos de 5 anos	AEE

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Ao fazermos a leitura do Quadro 4, observei a caracterização dos sujeitos de pesquisa, que a maioria dos professores atuam mais de (15) quinze anos em sala de aula, nos primeiros ciclos do Ensino Fundamental.

Na questão 7, questionei os professores se usam materiais manipuláveis e/ou recursos pedagógicos em sua sala de aula de matemática? Em quais situações? Se sim, cite-os, conforme destacado no Quadro 5.

Quadro 5: Questão 7: Você usa materiais manipuláveis e/ou recursos pedagógicos em sua sala de aula de matemática? Em quais situações? Se sim, cite-os.

Quantidade de sujeitos	Usa materiais manipuláveis e/ou recursos pedagógicos	Situações
3	Sim	Jogos matemáticos
2	Sim	Geometria
5	Sim	Operações matemáticas
4	Sim	Sistema de Numeração Decimal
1	Sim	Fração

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Pude aferir que todos os professores utilizam materiais manipuláveis em suas aulas de Matemática, embora 5 professores afirmaram que utilizam em situações de operações matemáticas, 4 utilizam em sistema de numeração decimal, 3 utilizam com jogos matemáticos, 2 utilizam na geometria e 1 utiliza com frações.

De acordo com a análise do quadro 5, observei que boa parte dos professores usam materiais manipuláveis e/ou recursos pedagógicos em sala de aula, porém, poucos evidenciaram utilizá-los para resolução de problemas.

Na questão 8, perguntou-se aos professores com que frequência trabalham com resolução de problemas matemáticos com seus alunos, conforme o Quadro 6.

Quadro 6. Questão 8: Em tuas aulas com que frequência você trabalhar Resolução de Problemas Matemáticos com seus alunos?

Quantidade de sujeitos	Trabalha Resolução de Problemas	Frequência
5	Sim	Sempre
2	Sim	Uma ou duas vezes por semana
2	Sim	Pouca frequência
4	Não soube opinar	-
1	Não	-

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Notei algumas convergências nas respostas deste quadro, com relação ao anterior, visto que, não foi apresentada anteriormente resolução de problemas ou indício de atividades envolvendo situações-problema, embora 5 professores afirmaram trabalhar sempre com resolução de problemas, 4 não souberam responder, 1 não trabalha, 2 afirmaram trabalhar uma ou duas vezes por semana, 2 trabalham com pouca frequência.

No quadro 6, os professores apresentaram pouca frequência com aplicação de resolução de problemas, principalmente em se tratando das etapas. Costumeiramente fazem uma breve contextualização no início de suas aulas ou pouco exploram essa metodologia. Diante disso, percebi que a resolução de problemas não era familiar para a maioria dos professores.

A questão 9, foi formulada com o intuito de gerar uma nuvem de palavras, em que os professores indicaram 5 (cinco) palavras, a partir das suas experiências com relação à resolução de problemas. Apresento assim a nuvem de palavras, gerada a partir das palavras descritas pelos professores a fim de melhor visualização, conforme a seguinte figura:

Figura 2. Nuvem de palavras da questão 9: Escreva as cinco palavras que mais identificam sua experiência em trabalhar resolução de problemas com seus alunos.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Diante da nuvem de palavras apresentada anteriormente, apurei as palavras em destaque, sendo que apontam as especificidades dos professores, em relação à sua experiência com resolução de problemas. Na apuração, metade dos professores mostram que a resolução de problemas é um desafio e, por isso, apresentam particularidades, como compreender, interpretar e encontrar estratégias pedagógicas para resolver problemas.

Também, apresentaram que os problemas são pouco contextualizados, requerem pensamento matemático e raciocínio lógico para identificação sistematizada. Alguns professores evidenciaram que, na tentativa de resolver o problema usam material concreto, desenho e fórmulas, o que chamou a atenção. Das respostas apresentadas, compreendi que poucos professores assumem ter dificuldade, domínio, autonomia e curiosidade em aprender a resolver problemas.

Por fim, na questão 10, perguntei aos professores qual era a expectativa em relação ao curso. No quadro a seguir são apresentadas as respostas, que sinalizaram a expectativa do objetivo geral da pesquisa.

Quadro 7. Questão 10: Qual tua expectativa em relação a este curso?

Quantidade de sujeitos	Expectativa com o curso
7	Aprender novas estratégias para RPM
5	Melhorar minha prática pedagógica
2	Adquirir conhecimento matemático

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Assim, comparando as respostas do quadro 6 com o quadro 7, notei o desejo dos professores em aprender novas estratégias, para resolver problemas por meio de um ensino com prática, que atenda suas especificidades e até suas necessidades, pois relataram que seu repertório de estratégia nem sempre atende a demanda para ensinar todos os alunos, em sua sala de aula.

Como apresentado no Quadro 7, inicialmente, foi realizada a aplicação do problema inicial, para que fosse produzido e analisado dados iniciais sobre como os professores resolvem problemas e identificar quais estratégias utilizam.

As enunciações dos professores e os RE do problema inicial, foram apresentados juntamente com o problema final, na Seção IV deste trabalho, em que analisei os efeitos *a posteriori* e a validação do produto educacional.

Levando em consideração que o recurso Modelo de Barras só foi apresentado aos professores a partir do problema 1 (Sala de aula de Carlos), priorizei, colacionar o problema inicial e o problema final na Seção IV, em que é feita a análise dos dados sobre os possíveis efeitos do uso do recurso Modelo de Barras para resolver problemas por meio das enunciações produzidas e dos RE.

3.1.2 Aplicação do problema 1 – Sala de aula de Carlos

A fala inicial da pesquisadora foi enfatizar que existem três tipos de problemas, tipo parte-todo, comparação e antes-depois, sendo que para o primeiro momento do curso seria ensinado a resolver problemas do tipo parte-todo.

Na lousa, foi projetado o problema 1 do produto educacional, o qual nomeamos de Sala de aula de Carlos. Assim, a pesquisadora convidou a professora Tarumã para fazer a leitura do problema[3].

Na sala de aula de Carlos, dois quintos dos alunos são meninos. Há 12 meninos na sala. Quantas meninas há na sala de aula? Quantos alunos há na sala de aula?

Após a leitura do problema, perguntei aos sujeitos de pesquisa se conheciam as etapas de resolução de problemas de Polya, alguns mexeram a cabeça como forma de dizer que não. Assim, entendi que não conheciam ou não utilizavam. Foi uma oportunidade de apresentar a eles as etapas, para isso, fiz novamente a leitura do problema apontando algumas observações a serem destacadas para despertar a atenção dos participantes.

A fim de elucidar sobre as etapas de resolução de problemas, principalmente a primeira etapa *compreender o problema*, a pesquisadora preocupou-se em fazer anotações no quadro ao lado da lousa, mostrando aos sujeitos de pesquisa que destacar os dados principais do enunciado do problema é um passo primordial para seu entendimento, sendo eles: os sujeitos da ação; onde acontece a situação-problema; algarismos ou dados numéricos escritos por extenso; e a pergunta do problema ou as perguntas.

Em seguida, a pesquisadora fez novamente, de forma pausada, a leitura do problema, procurando chamar a atenção dos participantes para refletirem, imaginarem, darem vida à situação-problema, sem tentar encontrar um cálculo imediatamente, mas entender do que se tratava o problema.

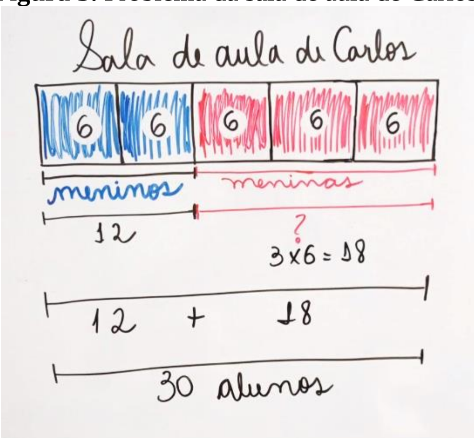
---

[3] Leitura do problema nesta seção, refere-se à leitura como o processo de apreensão/compreensão de algum tipo de informação de um texto que pode ser transmitida mediante determinados códigos, como a linguagem, justificando para não interferir no entendimento referente à “leitura plausível ou positiva” do MCS que tem outra direção já citada anteriormente neste trabalho.

A partir das anotações, a pesquisadora inicia a apresentação do recurso Modelo de Barras, modelando em uma barra horizontal os dados destacados como uma forma de visualizarem o todo e suas partes.

A Figura 3 ilustra a representação da situação dada pelo problema onde foram modeladas as barras pela pesquisadora na lousa.

Figura 3. Problema da sala de aula de Carlos.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao término da modelagem, a pesquisadora pergunta aos sujeitos de pesquisa:

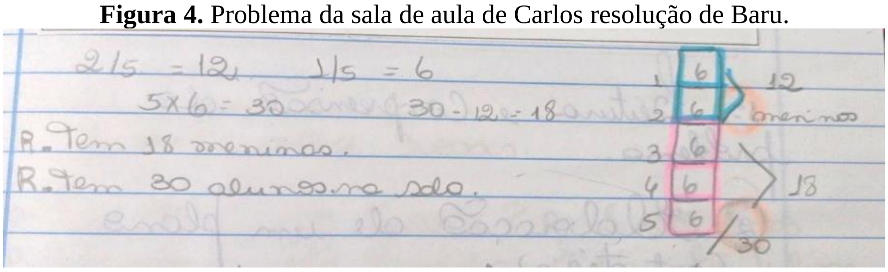
Pesquisadora: — É possível resolver este problema visualizando pelas barras?

Itaúba: — Sim!

Jequitibá: — Eu sabia multiplicando!

Baru: — Eu fiz assim, mas fiz em pezinho! (Mostrou seu registro com as barras na vertical) (Figura 4), pensei, veio na ideia de que dois quintos é doze, um quinto seria seis, fui botando nas barrinhas, soma assim separado. Foi mais ou menos assim que cheguei à interpretação, mas é que esse está mais fácil para interpretar, o outro não (problema inicial), a interpretação desse está mais direta, direcionada já!

Figura 4. Problema da sala de aula de Carlos resolução de Baru.



Fonte: Dados da pesquisa.

Tarumã: — Imagino, porque tanto pode ser adição ou multiplicação, eu vou chegar no resultado!

Sibipiruna: — Gostei desse Modelo de Barras porque eu gosto de coisas que eu posso visualizar, ele possibilita essa... porque eu gosto muito de rabiscar, *aí* eu me familiarizei bem com esse Modelo de Barras por isso, eu gosto de fazer esses esquemas de desenho!

Palmeira: — Nossa, amei essa estratégia. É visual, nossa!

Pesquisadora: — O que vocês sentiram? Teve algo que os incomodou com este problema?

Jatobá: — Esse achei tranquilo!

Jacarandá: — Esse achei esse mais fácil do que o outro. Eu pensei em fração!

Palmeira: — [...] eu também pensei na fração, mas não sabia nem como ia fazer. Quando eu vejo fração, esse que é o problema, mas, agora, olha, consegui!

Angico: — É porque nós estamos acostumados com aquelas situações-problemas que já estão com os dados ali, quando vo*cê* olha está faltando dados aqui, foi o que aconteceu comigo naquele primeiro, não tem como resolver, usei a estratégia do desenho, eu fui desenhando...

Baru: — ... fiz assim, porque eu sou muito visual! (mostrando as barras desenhadas na vertical à colega do lado).

Jequitibá: — Já pensei na multiplicação e na soma, nem pensei em mais nada!

Itaúba: — Quando você colocou o seis em todos, eu já sabia!

Feita a modelagem do problema, estabelecemos a socialização das técnicas de resolução que cada participante utilizou para encontrar o resultado. Em seguida, a pesquisadora apresenta uma estratégia pedagógica de iniciação à álgebra e, logo um comentário:

Aroeira: — Tem que ser a barrinha mesmo!" (Risos).

Ao final da socialização e apresentação da estratégia pedagógica utilizando as *letrinhas* (como um sujeito mencionou), a pesquisadora perguntou aos professores qual técnica se identificam ou utilizam, imediatamente, surgiram os comentários:

Aroeira: — As barras!

Araticum: — As barras, porque é mais visual!

Sibipiruna: — As barras, porque é mais fácil de entender, de compreender para nossos alunos, acho mais prático e mais fácil!

Angico: — Pensando enquanto criança faria com a barra, hoje, enquanto adulta, fiz o problema *dos peixes* usando bolinhas [...] daria para resolver o *dos peixes* agora…

Durante o diálogo surgem outras perguntas:

Pesquisadora: — Quando os alunos apresentam suas soluções, vocês incentivam eles a continuarem pela estratégia escolhida?

Jenipapo: — Eu sempre utilizo este modo, mas, agora, vou utilizar mais a barra, porque este modo é bem descomplicado!

Pesquisadora: — E se o estudante estiver desenvolvendo uma estratégia e, ele quer ir por aquela, vocês vão até o fim com ele ou apresentam outra?

Araticum: — Primeiro, eu verifico se ele está no caminho certo e se vai chegar no resultado!

Orientador: — E se a solução dele não vai chegar no resultado, o que você faz?

Araticum: — Vou acompanhando, observando, perguntando [...] digamos em uma mesma conta eles têm outras maneiras de fazer...

Angico: — Porque é assim, uma criança consegue fazer pelo abstrato, está mais madura, já tem outra que precisa fazer o desenho, o risquinho, contar, acho que aos poucos a gente precisa fazer essa transição, ir mostrando!

Jenipapo: — Hoje com a Pandemia todas as turmas têm dificuldade...

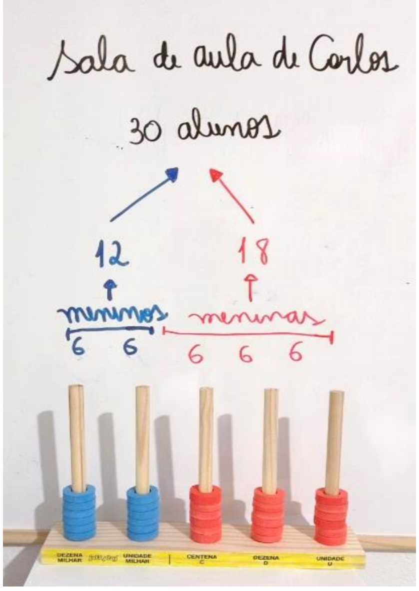
Acácia: — [...] gosto de estar sempre riscando no quadro, do meu jeito ou quando eles forem fazer no quadro ou no caderno eu deixo fazerem a estratégia deles. Ontem mesmo, nos deparamos com uma situação que estamos trabalhando classe de ordens e o exercício falava que a pessoa tinha 85.000 e só queria saber qual era a diferença para chegar na próxima ordem, para centena de milhar, e eles responderam que era 100.000, tinha um aluno que mostrou uma adição de *85 + 15 = 100.000* e a minha expectativa era que ele fizesse subtração, igual dar o troco para completar!

Jacarandá: — Assim, na verdade somos tendenciosos, porque achamos que para ensinar é obrigatório a criança fazer aquilo. Acabamos puxando para tentar da nossa maneira, por isso que é importante, por isso que eu vim aqui para aprender estratégias diferentes e para também confiar...

Devido este último comentário, a pesquisadora apresenta aos professores a razão de sabermos e conhecermos mais estratégias pedagógicas, para que possamos pensar, apresentar e, assim, termos mais chances de aproximarmos e acompanhá-los.

Apresentamos outro modo de resolver o problema utilizando recursos com material concreto, o ábaco, mas não para seu fim pedagógico, contudo apresentando uma forma criativa de usá-lo:

Figura 5. Problema da sala de aula de Carlos resolução com ábaco.



Fonte: Dados da pesquisa.

Concluindo o problema, foi reforçado a importância de sempre fazer conferência da resposta por meio da prova real a fim de que o aluno se certifique do resultado e perceba seu autoconhecimento e autonomia de suas escolhas. Logo, surge um questionamento:

> **Angico:** — E se o aluno respondesse só o total? Se ele conseguiu responder o total é porque sabia quantos alunos tinha. Se ele respondesse só 30 alunos eu consideraria que ele conseguiu fazer! [...] analisaria os cálculos dele ali, se ali aparecesse todos os dados, se ele apresentasse só o total de alunos eu consideraria.
>
> **Tarumã:** — Eu consideraria, eu ia pensar na seguinte forma, bom, se ele descobriu que tem 30 ele descobriu o total de alunos...
>
> **Angico:** — [...] pelos cálculos aparecesse e, também, só se ele colou, olhou no do coleguinha…
>
> **Baru:** — Se fosse uma avaliação eu não daria o valor 100% na avaliação porque tem duas perguntas e ele respondeu apenas uma, no caso fosse uma avaliação

escrita iria colocar uma observação ali [...] na realidade está perguntando duas situações seria dois cálculos, na minha opinião, então, eu tiraria um pouquinho da nota!.

Jenipapo: — Chamaria ele para entender o outro cálculo [...] fazia esse questionamento com ele para entender a descrição da segunda resposta, para ele aprender que...

Acácia: — Até porque essa indagação de mostrar para ele o que falta nessa parte, faz parte da primeira etapa do problema, a de compreender o problema.

Angico: — Então, se ele chegou no resultado é porque ele entendeu o problema.

Acácia: — Não, ele entendeu mais ou menos...

Sibipiruna: — No caso, eu compreenderia que ele descobriu sim que era o 18, a resposta, só que eu ia intervir para ele me responder a outra pergunta também, mas eu consideraria e diria então coloca, então ele iria colocar o 18...

Orientador: — De que forma seria essa intervenção sua Sibipiruna?

Sibipiruna: — Iria perguntar para ele: você descobriu as meninas? Você descobriu? Então, ele falaria que sim e, eu ia falar *para* ele colocar.

Angico: — Professor (se direcionando para o orientador) seria correto colocar a resposta para o aluno saber que tem que sempre responder assim ou tem que deixar que o aluno responda?

Orientador: — Quem te perguntou, não trabalho com anos iniciais, então, mas eu acho que tem que ter um processo dele ir sabendo que toda vida ele tem que dar uma resposta.

A partir desse diálogo, a equipe da escola em que a diretora e a coordenadora participaram do curso, nos trouxeram um relato de um projeto de intervenção que adotaram para a instituição. Consistia em um caderno de desafios em que os próprios alunos produziam seus problemas e o colega deveria responder, chamado “Diário da Matemática”, sendo uma forma de interação entre os colegas, bem como professor e aluno.

Baru: — Costumo conversar com meus alunos no sentido em que a gente precisa falar quando eu pego um papel, eu só tenho aquilo ali para você me explicar o que você fez. Quando nós estamos em sala de aula você pode justificar, pode explicar, nós temos essa interação, agora, quando estou com uma avaliação ou um material tem que ser bem explicado, porque eu não vou ter você para me justificar, é quase como uma carta (entender pelo que está escrito), eu não tenho como o aluno me explicar, não, mas eu fiz isso, fiz aquilo e tal. Só que nós vamos dar um retorno, fazer devolutiva para o aluno, por isso que é importante a devolutiva, para o aluno pegar essa avaliação ou pegar essa atividade, vê o que aconteceu e para eles poderem ter esse retorno, porque muitas vezes a gente não consegue fazer, também até pela quantidade de alunos que temos em sala. Mas, quando temos o papel é bem específico, não tem como você ah, mas ele tentou assim, tentou assado é bem difícil de saber como vai avaliar.

Acácia: — [...] e quando trocam um número, mas o resultado está correto, mas você não consegue avaliar se foi realmente ele quem fez ou se fez mentalmente e se está além daquilo que você imaginava que era capaz de fazer ... ”.

Araticum: — [...] tive muita dificuldade na Matemática que às vezes me dá até pânico *né*, mas assim eu tive uma professora que me fez entender o processo, enquanto eu estava ali com aquela conta ela conseguia me mostrar onde eu errei, ela não me deixava apagar, perder toda minha conta, porque era isso que acontecia em outras aulas, você errou, então, eu apagava tudo, começava de novo. Ela fazia a conferência porque às vezes estava na metade da conta e, daí comecei a entender onde errei, por onde poderia continuar resolvendo a conta e, isso me ajudou muito.

Pesquisadora: — Como que você olha para essa forma que a professora te passou isso, você ainda utiliza isso? Em qual ano escolar você estava?

Araticum: — Tirava notas horrorosas na escola. Na época, no oitavo ano, tinha simulado na escola e, eu comecei a entender, então, comecei a ser uma das primeiras...

Com esse diálogo apresentamos aos professores a importância do modo de fazer, isto é, seguir as etapas desde os anos iniciais, pois este hábito de conferir o que estamos fazendo é uma forma de garantir um resultado com qualidade, principalmente em se tratando de problemas matemáticos.

Araticum: — Tinha pânico de apagar…

Angico: — ... eh, está tudo errado, apaga isso, começa tudo de novo...

Neste momento, percebi nos olhares dos professores um certo arrependimento, estavam se colocando no lugar dos alunos e, por meio das expressões e gestos afirmavam já terem feito dessa forma, percebendo, como disse uma professora “que judiaria esse modo nosso de agir”. E, uma professora trouxe sua justificativa:

Baru: — [...] tenho pânico com Matemática, sou sincera. Além de pedagoga, sou formada em Letras, por isso que eu falo que sou professora de Português. [...] eu não aprendi Matemática e, hoje, a dificuldade de ensinar assim de forma individual é que temos muitas obrigações em sala de aula, e hoje, o foco está em

> torno de terminar os conceitos, terminar os objetivos, terminar o livro didático, porque eu sou cobrada, então, eu tenho um acúmulo de conteúdo a serem desenvolvidos, e um grande número de alunos com deficiência, com carências que eu não tenho esse tempo árduo de sentar, de avaliar. Então, assim, o que pesa hoje para nós que temos essa visão, porque nós sabemos que é importante direcionar o aluno, mas conseguir conciliar isso na sua metodologia sabendo que você tem um acúmulo de informação, que temos que transmitir, repassar para o aluno, e que você tem que dar essa atenção individual, então, para uma turma de 30 alunos você não consegue, e agora, com esse retorno da Pandemia, que eles voltaram, vamos dizer assim, estão no 5º ano, mas com carência lá do 3º ano, do 4º ano, e isso duplicou nossa preocupação...".

Com esse depoimento, a professora demostrou a necessidade de conhecer novas estratégias pedagógica, sendo uma forma de trabalhar seus anseios com à matemática, bem como ajudará a atender as especificidades dos alunos, uma vez que atuará com alunos do 1º aos 5º anos do Ensino Fundamental. Pois, sairá da zona de conforto, em estar sempre com turmas dos anos iniciais, lecionando Língua Portuguesa.

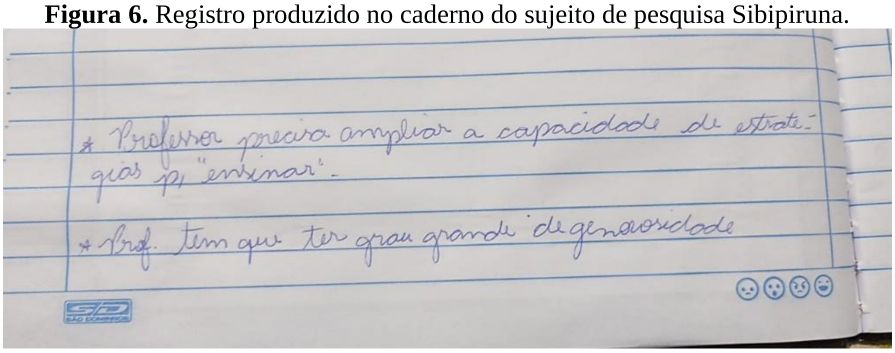
Baru: — [...] vai ajudar, principalmente com esse material concreto (Ábaco)...

Por fim, perguntamos aos professores se fariam alguma alteração neste problema, a maioria disse que não faria nenhuma modificação e que estava adequado para o segundo ciclo do Ensino Fundamental.

Indicativos de efeitos do Modelo de Barras no problema 1

Ao analisar as anotações produzidas pelos professores nos cadernos de registros, percebi no verso da folha, na parte inferior do caderno da Sibipiruna, o seguinte resíduo de enunciação:

Figura 6. Registro produzido no caderno do sujeito de pesquisa Sibipiruna.



Fonte: Dados da pesquisa.

O registro apresentado pela Sibipiruna mostra dois efeitos a qual considero que modificaram sua forma de ensinar e resolver problemas, são eles: *aprimoramento profissional* enquanto docente, ou seja, ser capaz de ensinar de outros modos, visto que o sujeito apresenta "ampliar a capacidade de estratégias para ensinar"; e *desenvolvimento da virtude de generosidade* enquanto professor.

3.1.3 Aplicação do problema 2 – Buquê de flores

O problema "Buquê de Flores" foi escolhido a fim de compreendermos como o pedagogo produz significado para uma atividade envolvendo conceitos iniciais sobre frações.

Mônica fez um buquê com 24 flores, $\frac{1}{3}$ *são rosas e o resto são tulipas. Qual a quantidade de rosas e quantidade tulipas que Mônica colocou no buquê?*

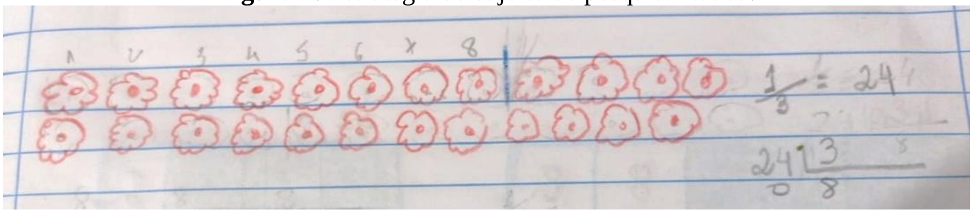
Entregando o problema 2, logo surge a primeira fala:

> **Jenipapo:** — [...] estou vendo que tem alguma coisa já semelhante com o que eu passo em sala. [...] *Putz*! Gente! No começo eu fiquei bem assustada, *né*, aí parece que o bloqueio vem parecendo até que você nunca tinha visto aquilo!
>
> **Orientador:** — [...] é muito pelo contrário, viu gente! Estamos interessados em aprender com vocês porque temos descoberto que nós que trabalhamos com a Matemática temos muito a aprender com os pedagogos.
>
> **Jenipapo:** "E nós estamos meio retraídos! Vou começar me soltar!"

Com o problema entregue, foi estipulado aos participantes resolverem no tempo de 20 (vinte) minutos. No início surgiram alguns comentários e demonstrações de suas técnicas ou estratégias de resolução:

> **Jenipapo:** — Depois vi que comecei a fazer meu processo lá (problema do Aquário) que eu mandei e não ficou bem agora eu apaguei, mas não terminei.
>
> **Tarumã:** — Vou desenhar a barra!
>
> **Angico:** — Já ia desenhando as flores, mas vou fazer a barra!
>
> **Itaúba:** — Veja! Fiz florzinha. Acredito que acertei!

Figura 7. Estratégia do sujeito de pesquisa Itaúba.



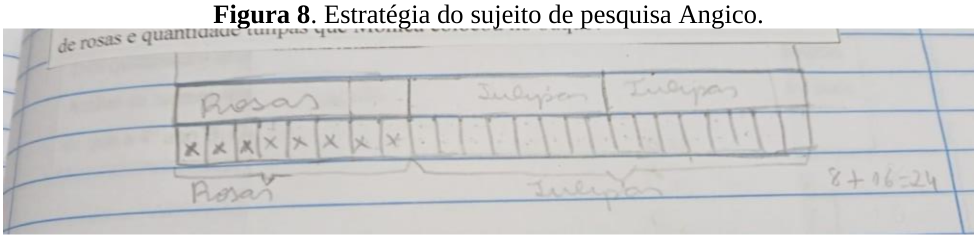
Fonte: Dados da pesquisa.

Araticum: — *Ah*, eu vou desenhar as flores!

Acácia: — Se é a barra, agora que eu aprendi vou fazer com a barra!

Angico: — É, vamos fazer com a barra!

Figura 8. Estratégia do sujeito de pesquisa Angico.



Fonte: Dados da pesquisa.

Pesquisadora: — Colegas, quando eu apliquei esses problemas na minha sala do 4° ano, uma estudante de 9 (nove) anos percebeu que a minha solução apresentada no quadro de um dos problemas estava faltando alguma coisa e aí ela falou que estava errado. Então, eu fiquei feliz que tinha esse erro porque ela falou com tanta convicção que estava errado que fiquei encabulada da segurança dela. Ah! Outra, foi bom que aconteceu isso porque foi uma forma de todos verem que fui eu quem elaborou esses problemas e agora podemos ajustar. Esses problemas foram todos eu quem fiz, então, se tiver erro...

Sibipiruna: — Meu Deus! Mas é maravilhoso saber que ela estava realmente entendendo, porque se ela não percebesse, ela estava ali superficial, né!

Aroeira: — Realmente ela estava entendendo!

Acácia: — Se tiver erro nesse aqui, você avisa, eu não vou achar não!

Todos concentrados resolvendo seu problema.

Neste momento, passei a circular pelas carteiras, observando, e quando solicitada, ouvia o sujeito primeiro a fim de tentar entendê-lo para que depois pudéssemos conversar com ele. Em uma das perguntas, um dos sujeitos de pesquisa vira seu caderno de registro mostrando a pesquisadora sua estratégia:

Sibipiruna: — Está certo?

Pesquisadora: — Diga-me o que fez.

Sibipiruna: — Ah, me apeguei ao Modelo de Barras, faço o Modelo de Barras, acabou!

Pesquisadora: — Se apegou!?

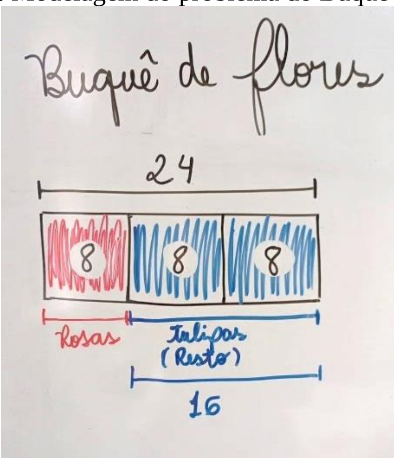
Sibipiruna: — Me apeguei ao Modelo de Barras, pronto, acabou. Agora só faço Modelo de Barras, me anima sabe, porque já resolvi! E porque eu gosto desse tipo de modelo de desenhar, eu prefiro, me apeguei ao Modelo de Barras!

Me chamou atenção quando Acácia disse:

Acácia: — Dá para fazer esse Modelo de Barras circular!

A pesquisadora fez a leitura do problema pausadamente explicando a importância de imaginar a situação que o problema apresenta para compreendermos quem é o todo e seus sujeitos. Após a leitura do enunciado do problema e destacar os dados principais, a pesquisadora fez a modelagem por meio da barra representada na figura 7 abaixo.

Figura 9. Modelagem do problema do Buquê de flores.



Fonte: Dados da pesquisa.

Após a representação com as barras, a pesquisadora procurou ouvir as estratégias de resolução utilizadas pelos sujeitos de pesquisa, convidando-os para explicar como chegaram às respostas. A colega Jenipapo gesticulou que gostaria de explicar como havia feito sua resolução.

Jenipapo: — Peguei o exemplo dessa estratégia (apontando para o quadro), dividi o 24 por 3 que é $\frac{1}{3}$. 24 dividido por 3 vai dar 8, então descobri que esse 8 são as rosas *aí* como você representou na barrinha, eu representei aqui os $\frac{2}{3}$, aí coloquei $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ = daí somei 8+8 = 16 descobri que seriam as tulipas [...].

A pesquisadora ressalta sobre a importância de conferência dos dados, pegar os valores encontrados e somar para ter certeza de que dará o valor do todo, ou seja, o valor total do buquê de flores.

Jenipapo: — Ah, só não tinha colocado o total, mas separei elas aqui, a quantidade, não tinha colocado o resultado total, deixei 8 rosas e 16 tulipas!

Assim, aproveitei o momento que considerei plausível para explicar uma técnica que costumo apresentar para meus alunos, a qual chamo de "Cabeça-Mão". Essa técnica consiste em raciocinar usando as partes do corpo, cabeça e mãos, assim usando mentalmente memorizamos colocando a mão na cabeça pensando no número maior, que será somado com o outro número que estão visualmente representados nos dedos da(s) mão(s). Assim, explicou neste problema como seria:

Pesquisadora: — Chamo essa técnica de cabeça-mão que por meio dela convido o aluno para raciocinar. Escolhe um dos números, e falo para eles pensem no maior, fala para sua cabeça o 16, agora, coloca em suas mãos o restante, neste caso o 8. E pergunto quanto é? Ajudo dizendo se na sua cabecinha tem 16 e nos dedinhos 8 é só pensar assim 16, 17, 18 até chegar no 24, favorecendo o pensamento matemático desse aluno.

Jenipapo: — Ah, também utilizo ela, mas não tinha dado nenhum nome a ela, utilizava mentalmente [...].

Acácia: — Essa semana fiz com meus alunos que estavam somando, que estavam usando até os dedos do pé, daí disse a eles que nós não precisávamos porque conseguimos contar de qualquer forma. Então, como estavámos trabalhando ordem, qual é o maior algarismo que tem das unidades? Então, eles falaram que era o 9, então o máximo que nós teremos será 9 + 9, falei para eles isso aí, você pega 1 e continua a contagem que você vai chegar lá!

Aos sujeitos de pesquisa, que aparentavam interesse nessa técnica de usar as partes do corpo, foi dito que apresentaríamos uma outra, usando as mãos para ensinar multiplicação.

Orientador: — Só que para isso todo mundo tem que saber a tabuada até o 5. A gente ensina do 6 ao 9 em três minutinhos!

Araticum: — Quero saber!

Palmeira: — Até o 5!? Mal eu sei!

Sibipiruna: — Já quero saber, vou cobrar!

Aroeira: — Para ensinar os alunos, nossa!

Assim, voltando a última etapa do problema a pesquisadora perguntou a Jenipapo se ela havia colocado a resposta por extenso:

Jenipapo: — 24 o todo!

Pesquisadora: — Vejam só, qual a quantidade de rosas e tulipas que Mônica colocou no buquê? Mônica colocou 8 rosas e 16 tulipas no buquê de flores. Lembrem-se não necessariamente precisa ser essa a resposta, podem ter mais respostas diferentes.

Baru: — Porque até eles perguntam, professora a resposta é completa ou pode ser curta?

Contribuições e soluções acrescentadas para o problema 2 pelos professores

A partir da apresentação das estratégias do problema 2 (Buquê de Flores), notei que a estratégia de resolução elaborada pela Tarumã merecia estar no produto educacional, pois trata-se de uma estratégia pedagógica que explica a diferença de usar a barra na horizontal e não na vertical. Logo, poderá servir como resposta a outros professores, em caso de dúvida em qual direção deve-se modelar a barra, uma vez que Baru já havia me perguntado sobre a barra na vertical.

Baru: — Coloquei 2 x 8 = 16, daí em baixo eu coloquei 16 + 8 = 24, bem simples assim! Só que a minha barra fiz para acompanhar as meninas, fiz ela na vertical (Figura 10), e você só está explicando com a barra na horizontal, daí eu deixei aqui a pergunta [...]

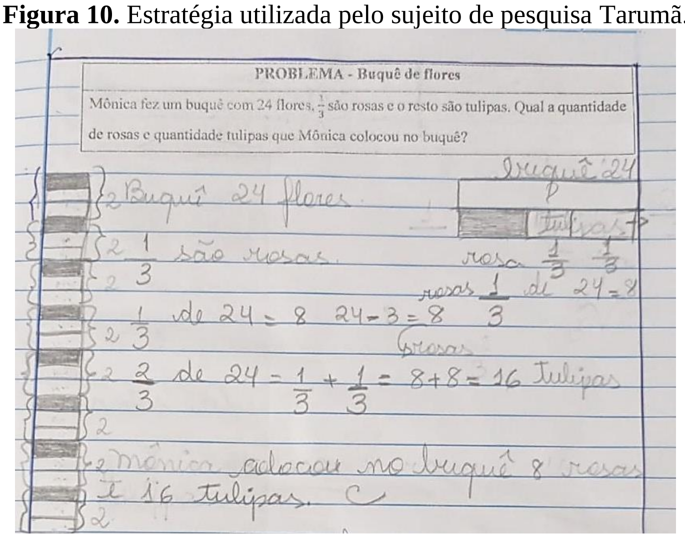
Araticum: — Fiz uma barrinha, bem simples assim!

Orientador: — [...] vocês talvez possam se deparar, não sei se alguém fará alguns dos problemas com seus alunos para saber, se fizerem, vocês vão verificar que terá aluno que fará uma barra só, vai ter aluno que fará duas barras, outros precisarão fazer mais de duas barras. Então, esse é um cuidado que às vezes é importante [...] uns podem fazer como uma professora falou pelo método curto, método longo [...]

Angico: — É como fiz aqui, desenhei uma barra com 24 pedacinhos, daí quando eu separei $\frac{1}{3}$ já sabia como fazer esse $\frac{1}{3}$.

Tarumã: — Cada três, pinta uma, eu fiz a barra na vertical, e dividi em 24 pedacinhos, a cada 3 pintei uma [...] *aí* eu obtive os dois resultados.

Figura 10. Estratégia utilizada pelo sujeito de pesquisa Tarumã.



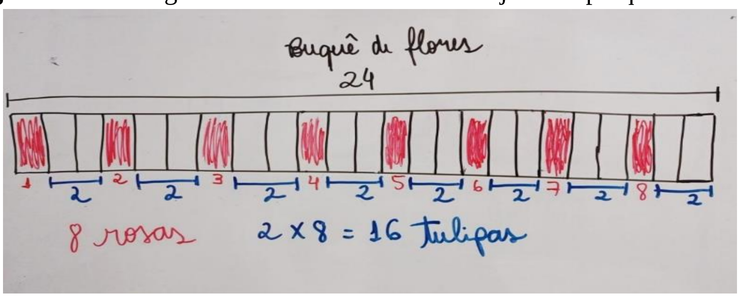
Fonte: Dados da pesquisa.

Partindo do modo de fazer a barra na vertical, apresentamos essa estratégia de resolução, porém no formato horizontal, para que pudessem observar e diferenciar quais dificuldades enfrentariam quando o todo fosse um número maior.

Pesquisadora: — Baru, respondi sua dúvida?

Baru: — Respondeu. Não dá para fazer sempre na vertical porque daí não vai ter espaço na folha do caderno.

Figura 11. Estratégia no formato horizontal do sujeito de pesquisa Tarumã.



Fonte: Dados da pesquisa.

Jenipapo: — Realmente cada um tem sua estratégia de resolver o problema!

Aroeira: — Bem interessante essa estratégia de resolução!

Pesquisadora: — Colegas, nós professores, por vezes esquecemos de lembrar nossos alunos da importância de agrupar, juntar e agrupar novamente, fazer a somatória porque nós não precisamos somar 1, 2, 3, 4, mas passar a pensar de 2 em 2, de 5 em 5, de 10 em 10, de 15 em 15.

Baru: — Às vezes, fico pensando quando eu ministrava Matemática no 5º ano será que eu não estou infantilizando muitos meus alunos de 5º ano? Será que essa maneira que eu vou é muito minuciosa? Eles não tinham que ser mais rápidos no raciocínio? Às vezes eu ficava com dúvida de como eu deveria ensinar porque às vezes eu pensando em agrupando, juntando para que eles tivessem estratégias mais objetivas.

Orientador: — Então, uma reflexão que nós podemos fazer com a questão da objetividade na sala de aula é a seguinte quando o seu objetivo eu estou falando para quem? Às vezes, estou falando para um grupo de alunos, 4, 5, 10 e os outros? Por exemplo, olha só a estratégia que a Tarumã fez aqui, eu não sei se alguém mais tinha pensado nisso [...]

Baru: — Deparei-me com essa situação quando fizemos o Diário da Matemática passávamos o exercício na lousa e eles desenvolviam. O aluno que levou para casa explicava qual estratégia de resolução utilizou. E perguntávamos: Alguém resolveu de maneira diferente? Então, vinha aquele aluno com estratégias de resolução um pouco mais minuciosas, os outros um pouco mais objetivas, aí eu sofria pensando e agora como que eu tenho que orientar? Eu tenho que fazer esse aluno que é muito minucioso para ser mais esperto, para ser mais rápido, mais objetivo ou eu devo trabalhar cada um do seu modo? Então, eu ia me adaptando nas metodologias, mas era uma questão que me preocupava na questão do ensino da matemática.

Orientador: — Essa é uma preocupação que nós temos quando falamos de outras estratégias pedagógicas do professor, em tese, ampliar a capacidade dele de atingir mais alunos, de afetar mais alunos. O pessoal fala bem assim o ensino tradicional é bom? É bom! Um grupo de pessoas aprendem, eu, por exemplo, aprendi um pouco de matemática dessa forma, agora, tem outras pessoas que não aprenderam, como a Araticum falou, até um certo momento, até o dia que ela encontrou uma professora que falasse para ela, ou seja, a hipótese que a gente tem é que outros professores podem ter dado aula sem nunca as atingir, sem nunca conversar com ela. Ela era, na cabeça do professor, um aluno ausente ali, esse aluno não existia. O dia que achou uma professora que identificou onde ela estava, e conversou com ela, deslanchou".

Tarumã: — Meu caso é o caso dela, eu tive um professor que dava aula dele, aquela aula dele tradicionalista e, eu ficava chorando, me descabelando porque eu queria aprender mais com ele não conseguia e, eles achavam que era eu o problema. Quando foi no 6º ano que eu voltei para escola, tive uma professora excelentíssima, ela tinha essa estratégia de resolução. Então, no 6º ano que fui aprender a Matemática, infelizmente. Pergunta minhas notas!? Era a primeira que entregava a prova de Matemática para ela tanto quanto que ela já corrigiu naquele momento que ela já sabia que eu tinha acertado a maioria era 9.5, 9.8, enquanto com este outro professor eu não saía do 1.5, 2.5, 3.5. O problema estava em quem? Estava em mim? Aí eu descobri que o problema não estava em mim.

Orientador: — **C**ostumo usar uma frase que fala bem assim: o professor independente de quem for ele, precisa ter um grau generosidade. Porque o professor não faz para ele. Ele tem que fazer com que o outro faça. Não é o quanto eu sei é o quanto eu consigo auxiliar o aluno a fazer.

Tarumã: — Pois é, eu não aprendi de jeito nenhum!"

Orientador: — Esse é um dano que muitas vezes acontece em escola pequena, você tem o mesmo professor, por exemplo, do 6º ao 9º ano, se esse professor não conseguir conversar com todo mundo, com todos os tipos de alunos, ele vai passar três anos conversando só com um tipo de alunos e os outros vão ficar.... Então a ideia de multiestratégias é o seguinte: Eu já tenho e uso uma estratégia. Tudo bem! Com certeza é um sucesso porque você continua sendo professor. Então, vamos supor da turma de 30, 15 conseguem aprender do jeito que você ensina bem, agora vamos olhar para as outras estratégias que de repente você tem uma segunda estratégia, você já tem 15 garantidos consegue mais cinco, *oh*! Já melhorou, já tem 20 alunos, na sua sala, que desenvolvem as atividades. Se você coloca uma terceira estratégia e atinge mais 3, ora você já conseguiu mais 23 alunos. Consegue mais outra estratégia para resolver com mais 2 já consegue 25. Ah! Tem um aluno que você não consegue acessar e você pensa isso é um problema e questiona a dificuldade é de aprendizagem ou de *ensinagem* [...]

Angico: — A barra não seria ainda para quando eu não sei usar o algoritmo?

Pesquisadora: — A barra serve para aquele aluno que tem dificuldade para fazer a leitura dos dados do problema, mas isso não significa que ele não consiga fazer, então, ela contribui com o modo que esse aluno pensará, ou seja, qual estratégia terá como opção de resolução, se será com uso de material concreto, ou pictórico, ou da forma algébrica.

Angico: — Quando o aluno já é capaz de fazer [resolver o problema] não há necessidade do uso da barra.

Orientador: — Vocês quando estão alfabetizando não dividem os alunos em pré-silábico, silábico e o alfabético, a mesma coisa nós temos na Matemática esse envolvimento é homólogo, é parecido, ou seja, tem momento que o aluno tem necessidade do material concreto, e quando a gente fala do concreto é o concreto mesmo, por exemplo, quando está na educação infantil o que é o ideal é ter rosa representando rosa porque você não tem transmissão de significado, rosa é rosa. Quando passamos para as argolas observe que já temos a produção de significado, estamos usando argola como ícone para representar rosa ou tulipa já tem processo de significação aqui, uma complexidade, esse é o material do recurso pedagógico olha que já é um concreto com significado. Quando eu passo a representação pictórica seja bolinha ou risquinho já é o terceiro estágio. Risquinho significa rosa,

> bolinha significa tulipa, na outra parte, que passamos essa daqui de distribuir que é importante. Até agora estamos trabalhando com contagem e distribuição, e a outra parte que nós chamamos de aritmética é quando ele faz a conta de dividir ou de somar. Nesse passo aritmético pressupomos, imaginamos a maior importância da Barra [...] E, a partir de um certo momento que utilizamos incógnitas em números, ou seja, que mistura palavras com símbolos matemáticos, a gente chama de sincopado. Por fim, chega na algébrica total, que é quando você só usa X e Y. Perceba que há uma evolução que nem sempre é observada, quando a gente ensina, identifica onde o aluno está. De repente quando você fala isso esse aluno já está lá numa fase algébrica, o interessante é que na situação real de sala você pode se deparar, na mesma turma, com aluno algébrico, um pré-algébrico, um que precisa do material concreto".

Considero a reflexão da Angico, com relação ao "uso da barra apenas quando não se sabe usar o algoritmo", um efeito do uso do recurso Modelo de Barras, por ter relacionado o objetivo do recurso para o processo de aprendizagem, percebendo que é possível adaptá-la e aplicá-la não somente nos anos iniciais.

Também, percebi que os professores pedagogos, na tarefa de resolver problemas matemáticos, estavam em uma outra direção, pois o recurso Modelo de Barras ainda não havia se constituído como um modo de produção de significado, por isso a maioria dos professores escolheram desenvolver a resolução por meio da sua estratégia de desenhar as flores.

3.1.4 Aplicação do problema 3 – Alunos do 4º Ano

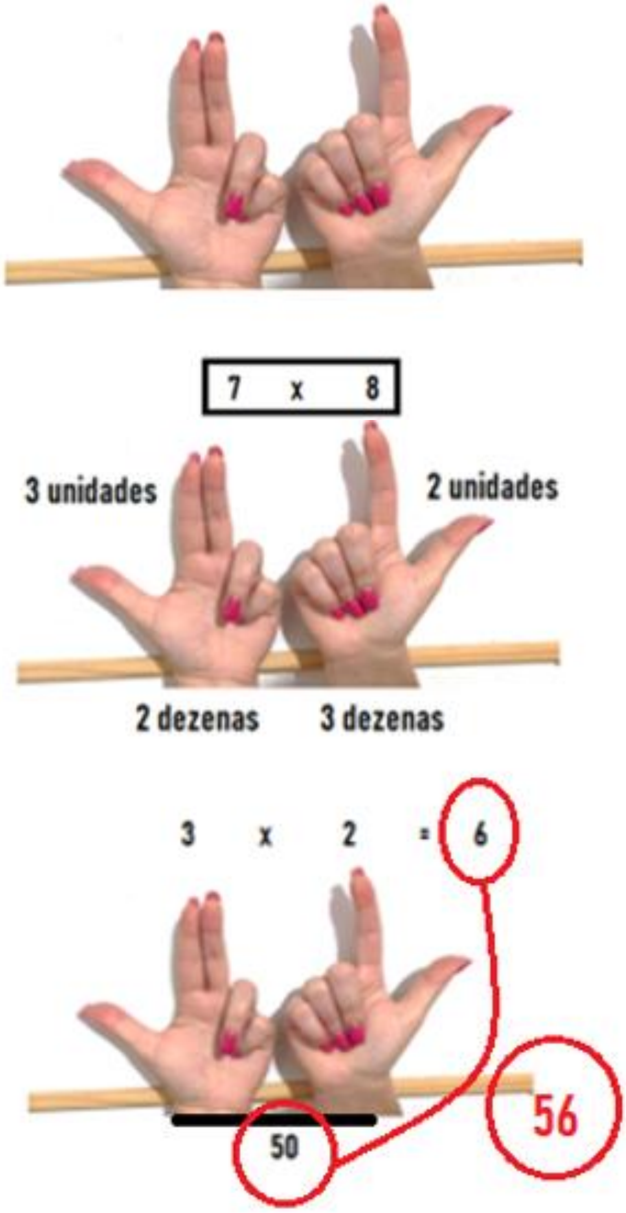
Antes da aplicação do problema 3, convidei os professores para conhecerem a técnica utilizando apenas as mãos. A técnica consiste em aprender a tabuada do 6 ao 10 em menos de um minuto, para isso, é preciso saber a tabuada até o 5.

O processo de ensino desta técnica foi mediado pelo orientador da seguinte maneira:

> **Orientador:** — Pessoal, todo mundo aqui sabe a tabuada até o 5 né!?
>
> **Jenipapo:** — Vish Maria, sei não!
>
> **Palmeira:** — E agora, sei mais não.
>
> **Acácia:** — Posso pegar o celular para ajudar?

Orientador: — É o seguinte, usando a tabuada do 6 ao 10, 7 x 8 por exemplo, em uma mão baixamos a quantidade de dedos que passa de 7, na outra, baixamos 3 dedos porque 8 - 5 é 3. Os dedos abaixados são as dezenas, 50, e aqui (apontado para os dedos levantados) as unidades, assim, duas vezes três é 6, então, 50 mais 6 é igual a 56.

Figura 12. Estratégia usando as mãos para ensinar tabuada do 6 ao 10.



Fonte: Dados da pesquisa.

Sibipiruna: — Vou anotar para não esquecer! Agora pode perguntar a tabuada (risos).

Aroeira: — Também vou anotar porque quero treinar e praticar com meus alunos!

Jenipapo: — Me vejo ensinando esses truques para meus alunos!

Seguido da prática da tabuada com as mãos, foi entregue o problema 3. A pesquisadora comentou que o problema entregue se trata do tipo comparação, e que ao invés de uma barra, como no tipo parte-todo, agora cada sujeito é representado por uma barra comparada a outra.

Três quintos dos alunos no 4º ano A e três quartos dos alunos no 4º ano B são meninas. Ambas as turmas têm o mesmo número de meninas e o 4º ano A tem 8 meninos a mais do que o 4º ano B. Quantos alunos têm no 4º ano A?

Entregando o problema 3, perguntamos aos sujeitos de pesquisa se levavam em conta o tipo de problema, se era parte-todo, comparação, muitos acenaram com a mão e cabeça com gesto negativo, outros comentaram:

Palmeira: — Não!

Jenipapo: — Não fazia ideia que tinha esses tipos de problemas!

Diante da tentativa de resolver o problema os sujeitos de pesquisa, começaram a produzir enunciados do tipo:

Itaúba: — Esse problema dá um nó na cabeça da gente!

Angico: — Esse problema não tem solução!

Aroeira: — Estou sofrendo com esse!

Sibipiruna: — Tudo isso para descobrir quantos alunos tem no 4º ano A!

Araticum: — Meus Deus! Como faz isso!?

Jatobá: — Deu uma confusão com o 4º ano A e com o 4º ano B!

Palmeira: — Aqui não tem nenhum dado gente!

Aroeira: — Pensei em tirar o mínimo múltiplo comum do 4 e 5. Deixa-me ver, vou tentar.

Araticum: — Não consegui pensar. Será que eu posso somar esses três quartos com o outro?

Sibipiruna: — Aqui multiplica também? É isso? Já viajei aqui deu 20 avos! É 20 vezes 3?

Aroeira: — Você pega o MMC e divide pelo debaixo e depois multiplica...

Sibipiruna: — Acho que vou esperar a explicação!

Aroeira: — Não consigo pela barra, quem dirá por outra estratégia de resolução!

Angico: — Não entendi o problema, mas estou fazendo!

Jenipapo: — Preciso da ajuda dos universitários.

Baru: — Olha só tem uma barra para os três quintos e uma barra para os três quartos...

Jenipapo: — Esse daqui é para multiplicar é?

Palmeira: — Apenas armei a barra e mais nada!

Sibipiruna: — E aquele de virar?

Aroeira: — Você quer dizer a operação inversa?

Sibipiruna: — Isso! Como é que faz?

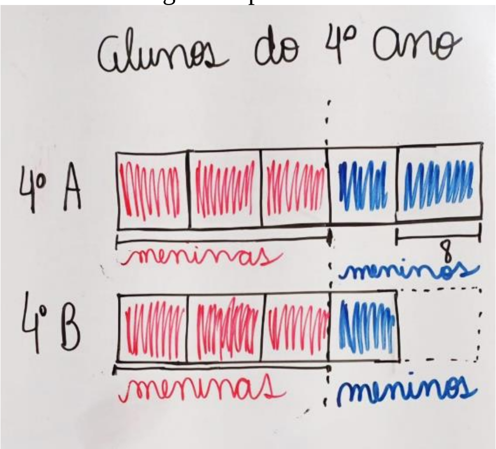
Aroeira: — Então, tem 20 alunos no 4º ano ... Não! (olhando as barras) Não tem como olha o tamanho delas. Errei! Ai vou ficar quieta!

Convidei a Acácia para fazer a leitura do problema. Em seguida, fui explicando a importância de seguir as etapas de resolução de problema. Primeiramente, identifiquei no enunciado do problema os dados, destacando os **Sujeitos:** 4º ano A e 4º ano B; **Dados numéricos:** três quintos e três quartos que são as meninas, e no 4º ano A tem 8 meninos a mais do que a 4º ano B; e a **Incógnita:** Quantos alunos têm no 4º ano A?

Depois de compreendido o problema, mostrei a segunda etapa em que elaboramos o plano e, em seguida, resolvemos pela estratégia escolhida, neste caso, modelei o problema a partir das barras.

Para isso, expliquei que antes de desenhar a barra é preciso atentar-se a que tipo de problema estamos trabalhando para definir a quantidade de barra a ser desenhada. Como são duas turmas, são duas barras, uma para cada turma, e a representação da fração deve ser observada para cada barra também, pois o todo 4º ano A, são cinco (5) partes, já no 4º ano B, são 4 partes. Deste modo, com a modelagem pronta, comparei as barras mostrando como chegar ao resultado observando a representação esquematizada, conforme a figura a seguir:

Figura 13. Modelagem do problema alunos do 4º ano.



Fonte: Dados da pesquisa.

Após a modelagem dos dados nas duas barras, alguns sujeitos expressaram entendimento como se tudo tivesse sido esclarecido, já outros preferiram comentar.

Jenipapo: — Até aí fiz certo!

Pesquisadora: — Até aqui todos conseguiram visualizar?

Jenipapo: — Sim, até aí consegui fazer!

Jacarandá: — Também fiz até aí!

Araticum: — Até aí acertei. Está bom!?

Acácia: — Também fiz a barra certa!

Aroeira: — Então, até aí fiz.

Assim, a pesquisadora convidou os sujeitos de pesquisa para encontrarem uma estratégia de como resolver o problema.

Acácia: — Quando colocou aquele 8 lá já elucidou a coisa. Tinha anotado naquele espacinho D + 8, então, quando você colocou o 8 lá dentro, matou a charada."

Baru: — 24 mais 16 da 40, então o total dá 40 (feliz comentando a resposta). Esse é meu raciocínio!

Sibipiruna: — Mogno! Eles estão querendo uma estratégia de resolução. Está difícil usar estratégias de resolução diferentes, porque esse modelo de barras é tão bom!

Baru: — **Nós** pegamos rápido! E olha que tenho muitas dúvidas com a matemática.

Jacarandá: — Apenas consegui identificar por causa dos quadradinhos!

Baru: — ... aquilo lá (apontando para o quadro com a modelagem do problema) serviu de referência para eu encontrar os outros valores!

Tarumã: — Entendi, serviu de referência para encontrar o valor do outro!

Durante as trocas para encontrar a solução do problema, o sujeito Sibipiruna retoma ao problema do Aquário.

Sibipiruna: — Ah! No do peixinho também é a mais...

Baru: — Do peixinho tinha que dar de novo para eu pensar.

Sibipiruna: — Cadê o do peixinho? Deixa-me tirar foto do peixinho e tentar fazer de novo! Eu não sabia que poderia validar aquele a mais a outra parte.

Baru: — Na hora do peixinho bloquei!

Sibipiruna: — Agora posso validar como uma parte o inteiro? ...

Angico: — Validei!

Sibipiruna: — Stela, agora descobri uma coisa, poderia validar o valor do peixinho igual você validou o 8! Me dá minha folha do peixinho, essa informação ia ajudar lá.

Neste momento, fazendo uma leitura positiva da professora, percebi que o recurso Modelo de Barras produziu significado para Sibipiruna pelo empréstimo da legitimidade quando disse que “poderia validar” no problema do Aquário.

No diálogo entre Angico e Acácia, os sujeitos reconhecem que as barras são equivalentes e a direção dos sujeitos estavam na compreensão do recurso que se constituiu na atividade.

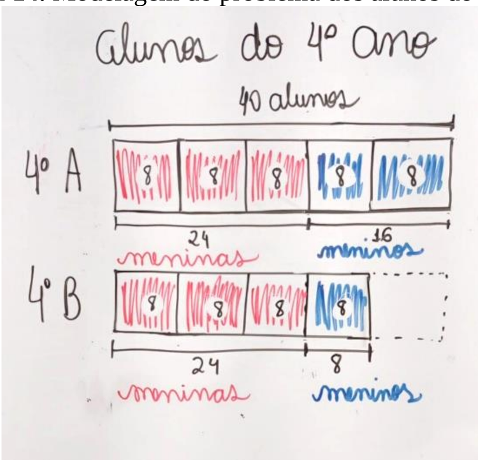
Angico: — Estava aqui pensando, as duas barras são do mesmo tamanho ou uma é um pouco menor?”

Acácia: — A quantidade dos meninos é maior, mas o das meninas é igual.

Angico: — Então, elas são equivalentes porque elas têm a mesma quantidade!

Acácia: — Quando igualei as barrinhas, percebi isso!

Figura 14. Modelagem do problema dos alunos do 4º ano.



Fonte: Dados da pesquisa.

A pesquisadora apresentou aos sujeitos de pesquisa outra estratégia pedagógica para resolver o problema, utilizando material concreto. Assim, com o auxílio do recurso pedagógico Ábaco, sendo que este não foi utilizado sua função de classificar e ordenar, contudo, usado como suporte representativo em que os pinos e o movimento das argolas podiam representar as quantidades de cada quadradinho da barra.

Desta forma, dois ábacos foram usados, um para representar o 4º ano A e outro para o 4º ano B, conforme a Figura 15 representada abaixo.

Figura 15. Estratégia utilizando ábacos do problema dos alunos do 4º ano.

Fonte: Dados da pesquisa.

Enquanto a pesquisadora representava os dados do problema com as argolas nos suportes, os sujeitos de pesquisa interagiam partilhando as informações conforme visualizavam a representação nos pinos.

Acácia: — Que legal!

Pesquisadora: — Pessoal, vejam que é possível fazer comparação com os ábacos, e percebam que os dados correspondem visivelmente.

Figura 16. Comparação dos ábacos do problema dos alunos do 4º ano.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, a pesquisadora perguntou aos professores se conheciam o Material Dourado. Todos ficaram calados, a partir disso resolvi apresentá-lo. Diante da utilidade deste recurso pedagógico, a pesquisadora apresentou outra estratégia pedagógica. Para isso, convidou um dos professores para representar os dados do problema utilizando o Material Dourado.

Ao fim da representação dessa estratégia pedagógica, perguntamos aos professores o que acharam:

Jenipapo: — Gostei!

Palmeira: — Impressionante!

Angico: — Nós não costumamos utilizar Material Dourado...

Jenipapo: — Porque queremos fazer mentalmente, resolver no... deixa de usar, explorar o material.

Orientador: — Primeiro engano que às vezes as pessoas têm é que ensinar com Material Dourado é facilitar, não é [...] que habilidades ela precisou usar para resolver o problema?

Araticum: — Contar!

> **Orientador:** — [...] vejam que pode não ser verdadeiro que eu não ensino isso ao meu aluno, porque ele não tem pré-requisito, pois se essa criança sabe contar ela resolve esse problema.
>
> **Tarumã:** — Verdade!
>
> **Orientador:** — Apenas precisava saber contar mais nada...

Ao final das representações com material concreto, perguntamos se os professores tinham o hábito de usar, em sala de aula, o Material Dourado, apenas um levantou a mão, afirmando com a cabeça que utilizava.

Por fim, utilizamos o quadro para finalizar o problema. Antes de apresentar as estratégias de resolução dos sujeitos de pesquisa, a pesquisadora reforçou como representar fração, mostrando a função do numerador e do denominador.

No momento observamos que, para a maioria dos professores, o objeto fração não era familiar, mas um objeto que habitava o jardim do Matemático. De acordo com Lins (2004, p. 94-95):

> Na Matemática do matemático há seres que ao mesmo tempo em que mantêm a maioria das pessoas fora do Jardim do Matemático, por serem para elas monstros monstruosos, são, para o matemático (entendido como aquele que circula pelo Jardim) monstros de estimação que, ao invés de assustarem, são fonte de deleite.

Com relação a leitura positiva ao observar os semblantes e as expressões dos sujeitos, naquele momento, notei que havia uma recusa com o objeto fração. Vale ressaltar que “o fracasso de tantos com relação à Matemática escolar não é um fracasso de quem não consegue aprender embora tente, e sim um sintoma de uma recusa em sequer se aproximar daquelas coisas” (LINS, 2004, p. 95). A partir da apresentação de fração aos sujeitos é que foi possível a produção de significado naquela atividade, sendo que se direcionam para outra direção, pois como não fazia sentido a atividade apresentada, despertou-lhes resistência, uma vez que para eles o ‘monstro’ habitava ali.

Assim, busquei apresentar o objeto fração pelas abordagens CPA do Modelo de Barras, que permitem produzir significado para a atividade, pois percebi que os sujeitos estavam paralisados, como diz Lins (2004, p. 102) “o monstro me paralisa exatamente porque não sei como ele funciona, como devo agir com relação a ele, não sei o que posso dizer dele”.

A pesquisadora perguntou aos professores se haviam feito de outros modos e se gostariam de compartilhar suas estratégias de resolução com o grupo.

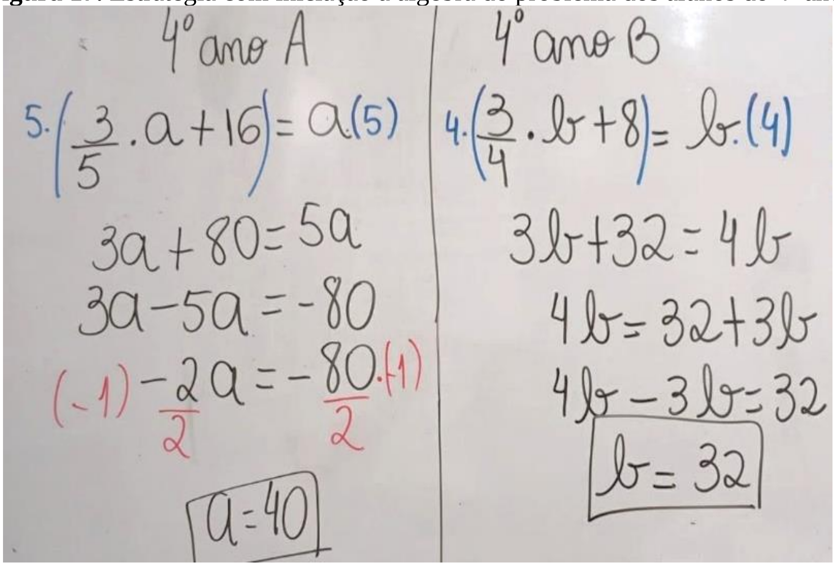
Acácia: — Falhei na hora da interpretação.

Orientador: — Como você fez? Poderia vir aqui na frente e explicar?

Acácia: — [...] percebi que dá para usar incógnitas, mas não consegui chegar na resposta!

Ao fazer a leitura plausível da enunciação da Acácia "falhei na hora da interpretação", percebi que não conseguiu produzir significado na direção esperada do ponto de vista matemático. Diante da tentativa do sujeito de pesquisa em resolver o problema usando incógnitas, a pesquisadora apresenta uma possibilidade com iniciação à álgebra para o grupo.

Figura 17. Estratégia com iniciação à álgebra do problema dos alunos do 4º ano.



Fonte: Dados da pesquisa.

Aroeira: — Por meio dessa estratégia de resolução não entendo nada!

Sibipiruna: — Também não lembro...

Ao concluir a resolução do problema com a estratégia de resolução de iniciação à álgebra, a pesquisadora entregou a ficha de avaliação (Anexo 5), sendo que esta era uma autoavaliação dos próprios sujeitos de pesquisa.

Baru: — Legal! Essa ficha de autoavaliação, vou fazer com os meus alunos para eles fazerem sua autoavaliação e verificando sua evolução [...]

Perguntamos aos professores se este problema é típico de ser trabalhado em sala de aula, ou se é adequado para alunos do 4º, 5 e 6º anos, também se encontram problemas parecidos com este no livro didático.

Baru: — Não trabalhei com eles (professora falando do seu 4º ano) álgebra acho que é só no finalzinho do 5º ano. O problema em si com as barrinhas acho que a gente trabalharia, mas acho que a álgebra é só no finalzinho do 5º ano [...].

Jenipapo: — Álgebra não é trabalhado no 5º ano [...]

Angico: — No 4º ano não tem álgebra, mas no 5º ano a gente começa a mostrar para eles.

Baru: — Graças a Deus! Não tem no 4º ano.

Neste problema pude observar que o efeito do recurso Modelo de Barras foi o autoconhecimento em que os professores sentiram anecessidade de ampliar seu conhecimento e produzir significado à álgebra, pois notei estranhamento, por parte deles, ao resolver o problema com uma expressão algébrica e suas justificações se firmavam em dizer que a Álgebra não era trabalhada nos anos iniciais.

3.1.5 Aplicação do problema 4 – Jogo de cartas

A proposta desse problema envolve estratégias pedagógicas que podem direcionar o pensamento algébrico, desse modo verifiquei como este recurso é constituído por professores pedagogos.

Todos os fins de semana a família Ferrari, primos e primas, se reúnem para jogar cartas, ganha o trio que fizer mais pontos. Na última jogada, foram fazer a somatória das cartas, constaram que Suzana fez 39 pontos a mais do que Mariana. Mariana fez 18 pontos a mais do que Luíza. Ao todo fizeram 261 pontos. Quantos pontos cada uma fez?

Logo na entrega surgiu alguns comentários com as primeiras reações frente ao problema:

Baru: — Meu Deus do céu!

Araticum: — Não sei fazer não!

Acácia: — Ainda não sei a resposta, mas a Luiza é ruinzinha na carta!

Angico: — Nem cheguei na segunda etapa! Acácia ajuda!

Passados 20 minutos do início da resolução problema 4, os sujeitos de pesquisa começaram a comentar entre si como estavam tentando desenvolver suas estratégias de resolução.

Baru: — [...] fiz uma *contaiada* aqui, o que eu fiz, eu dividi o total de pontos que é 261 em 3 porque são três meninas que deu 87 para cada. [...] peguei o 87 mais os 39 pontos da Suzana, deram 126 pontos, então como a Suzana fez a mais que a Mariana eu diminuí 39 dos 87 dela que deu 48 pontos da Mariana e, para encontrar o total de pontos da Luiza eu diminui o da Mariana com os 18 que deu 30. Quando eu somei o valor das três deu 204, o que eu fiz foi diminuir esse valor dos 261 e sobrou 57 pontos que também dividi por 3 e distribuí para elas. Aí, ficou assim oh! (disse mostrando seu cálculo no caderno de registro e afirmando às duas colegas que a ouviam) [...].

Tarumã: — E bateu?

Jenipapo: — Ah! Cheguei numa conta aqui, mas não cheguei no final que você fez!

Aroeira: — [...] você foi supondo? Como a Suzana fez 39 pontos então o valor é maior, é isso?

Baru: — Isso! Ela é o maior, só não sei jogar as barras! [...], mas esse valor total da somatória delas dá 204 que diminuí do 261, acrescentei para cada uma [...] você entendeu?

Aroeira: — Mas por que você foi tirando?

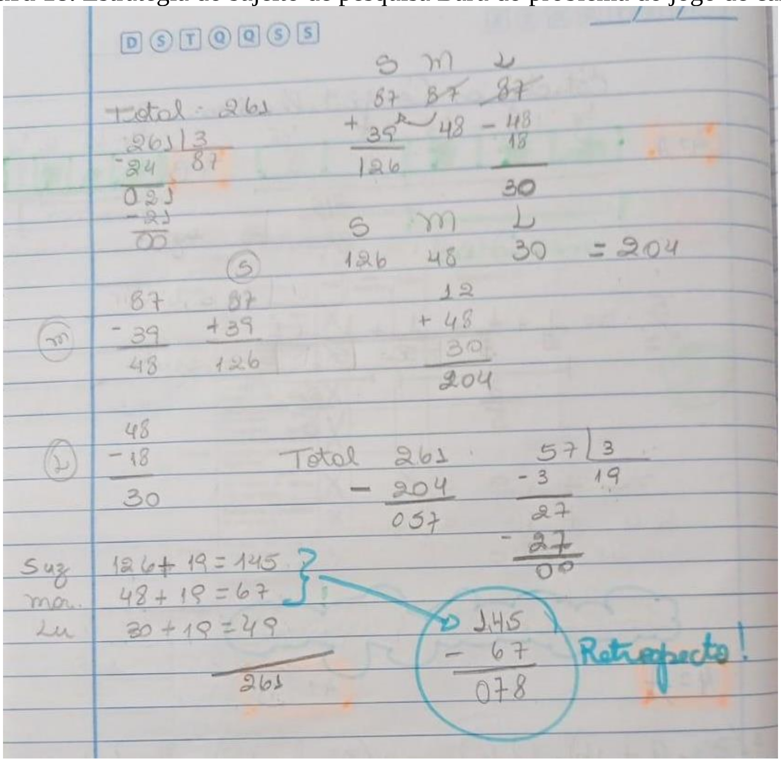
Baru: — Ah, porque sabia que a Suzana era a que tinha mais [...]

Aroeira: — Está, mas, então ficou 19 para cada uma?

Baru: — [...] você pega o 126 da Suzana e soma com 19, o 48 da Mariana e soma com 19 e o 30 da Luiza e soma com o 19, tudo vai dar 261.

Diante das trocas, a pesquisadora foi chamada para verificar se a solução apresentada por Baru (Figura 18) estava correta.

Figura 18. Estratégia do sujeito de pesquisa Baru do problema do jogo de cartas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao ver o registro, a pesquisadora questionou Baru, perguntando como havia pensado sua estratégia de resolução. A pesquisadora aponta que, ao conferir os pontos de cada sujeito do enunciado do problema havia divergência e, logo sugeriu conferir cada etapa e repensarem juntas como poderiam elaborar melhor essa resolução.

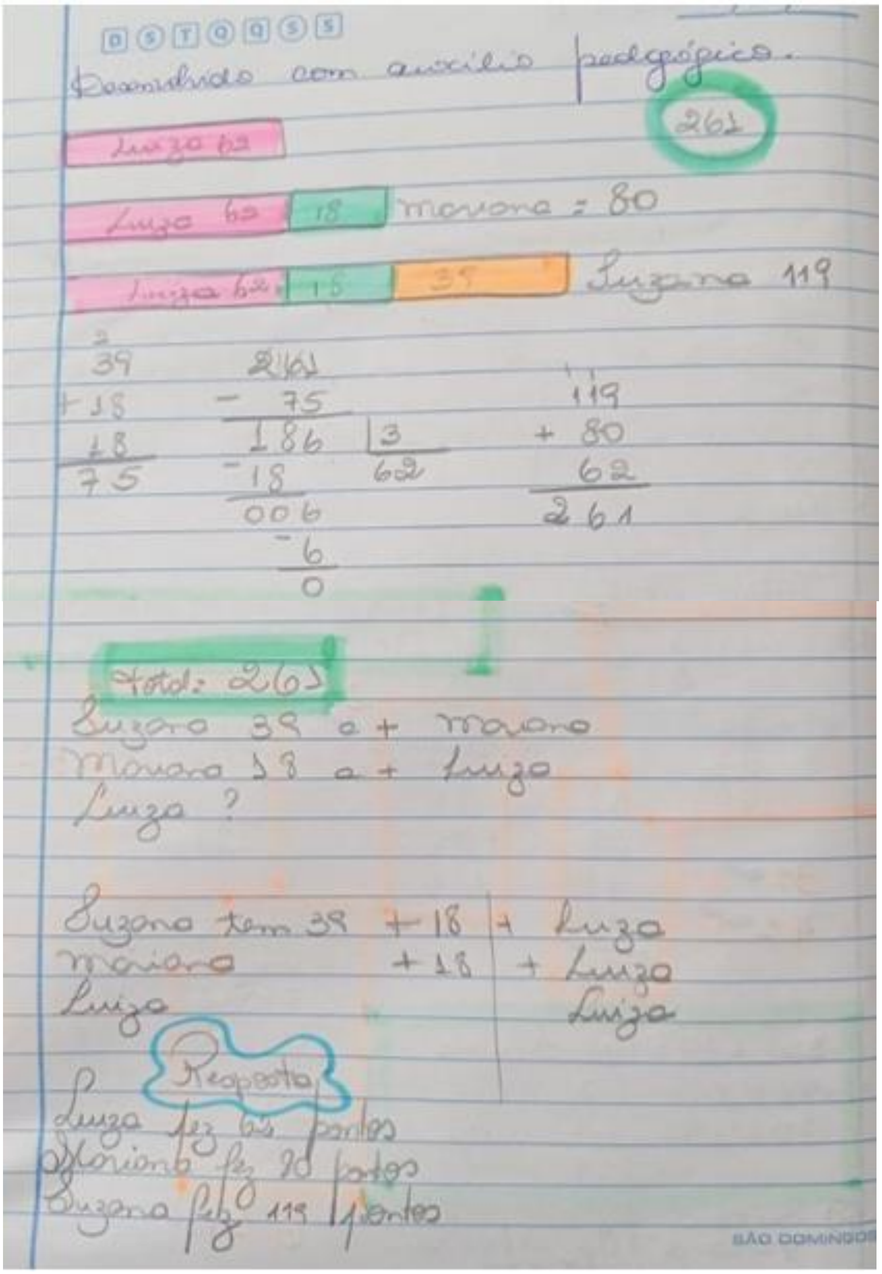
Baru fazia a leitura do problema e anotava cada dado como forma de compreender o problema. Com os dados anotados, propôs desenhar as barras, mas não sabia como iniciar.

Então, expliquei que esse problema se tratava do tipo comparação, sendo que precisariam desenhar três barras, uma para cada sujeito do problema e a terceira que faz a comparação entre os dois.

Desse modo, poderiam distribuir os pontos dos sujeitos do problema, em cada barra. Logo era preciso atentar-se à jogadora Luiza, sendo a única que não tinha uma pontuação, portanto iniciaram as barras por este sujeito, Luiza, fazendo comparação com as demais.

A seguir, a estratégia de resolução da Baru representada na Figura 19:

Figura 19. Estratégia do problema jogo de cartas desenvolvida pelo sujeito de pesquisa Baru auxiliado pela pesquisadora.

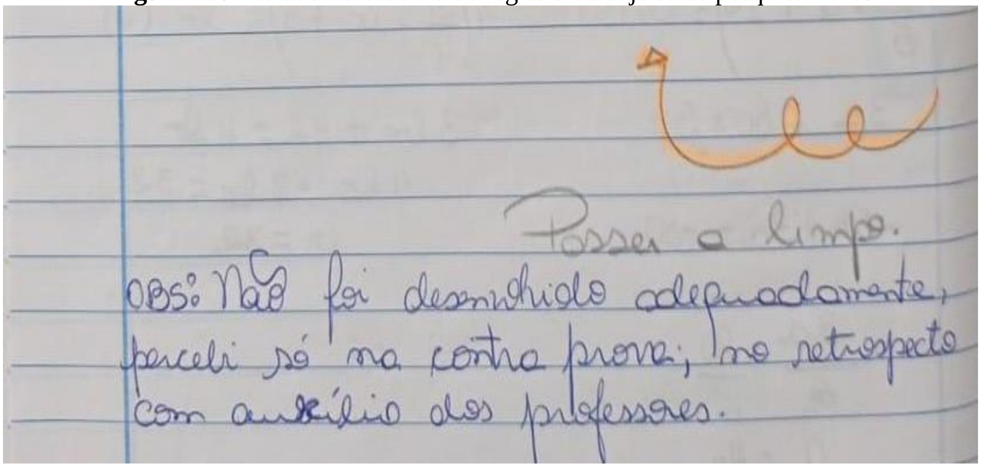


Fonte: Dados da pesquisa.

Percebe-se nesta solução que as etapas de resolução de problemas foram seguidas gradualmente, possibilitando que o sujeito construísse as barras as quais proporcionaram o pensamento aritmético.

Ao observar os resíduos no caderno de registro de Baru, verificou-se que houve mudança em sua forma de resolver problemas, conforme pode ser constatado na Figura 20.

Figura 20. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Baru.



Fonte: Dados da pesquisa.

O diálogo se intensificou, os professores interagiam numa constância de trocas de ideias e modos de fazer, por meio das suas experiências. À medida que produziam suas estratégias de resolução e sem êxito, buscaram resolver pelo modo apresentado por Baru. A partir disso, a equipe de pesquisa começou circular pelas carteiras a fim de verificar onde esses sujeitos estavam, qual era a direção que estavam, logo foram feitas intervenções para contribuir com as soluções.

Mogno: — Stela, me ajuda! Não estou conseguindo fazer pelas barras.

Baru: — Também não consegui fazer pelas barras. Só depois que a professora me orientou é que deu.

A equipe passou por todas as mesas auxiliando e mediando a construção das barras. Este movimento se deu, devido ao fato de que, todos os sujeitos de pesquisa procuraram resolver pelo modo que Baru apresentou, pois ao fazerem a quarta etapa de resolução de problemas perceberam que o caminho a seguir não era o mais adequado, mas que contribuiu para repensar o que já havia pensado até o momento.

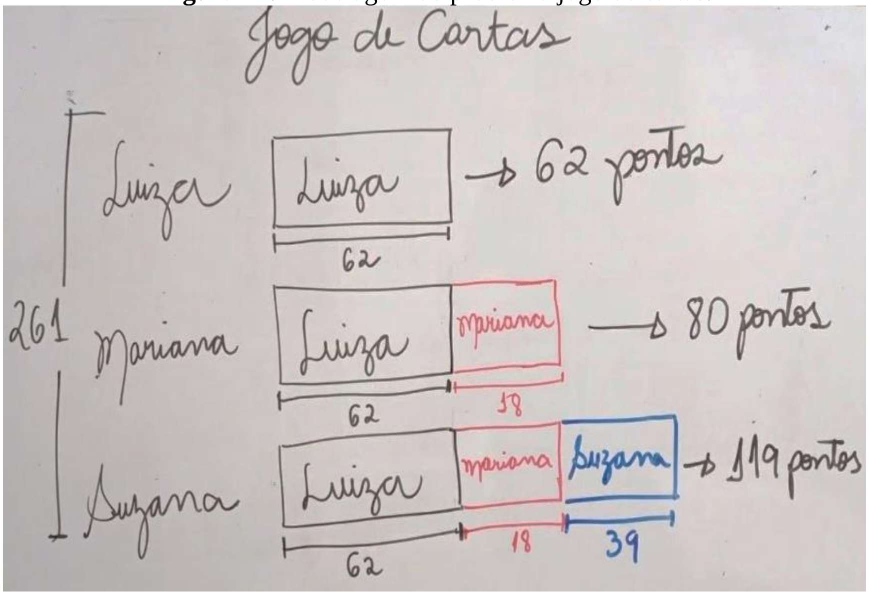
O interessante foi sua enunciação ao erro:

Araticum: — Eu errei desde o início!

Tarumã: — Estou fazendo igual o dela (apontando para Baru)!

Por fim, socializamos cada solução na lousa, desenhando as barras e enfatizando cada etapa de resolução de problemas.

Figura 21. Modelagem do problema jogo de cartas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Aroeira: — Como esse Modelo de Barras ajuda!

Sibipiruna: — Não conseguiria fazer sem o Modelo de Barras!

Aroeira: — Sem condições mesmo de fazer sem as barras!

Sibipiruna: — [...] vocês perceberam que ele ajuda a sistematizar, pensar [...]

Mogno: — Eu mesmo, só entendi depois que a professora Stela me explicou individualmente!

Palmeira: — Realmente, esclareceu!

Sibipiruna: — Conseguiu? (perguntou para o sujeito de pesquisa Araticum).

Araticum: — Dei conta nada, só depois que vieram na minha mesa.

Angico: — Agora vendo ali também entendi!

Convidamos os sujeitos de pesquisa para fazerem a solução do problema utilizando Material Dourado.

Pesquisadora: — Quem gostaria de resolver com material concreto?

Silêncio na sala.

Pesquisadora: — Dá para resolver com material concreto?

Sibipiruna: — Dá! Mas vai dar muito trabalho.

Pesquisadora: — Por quê?

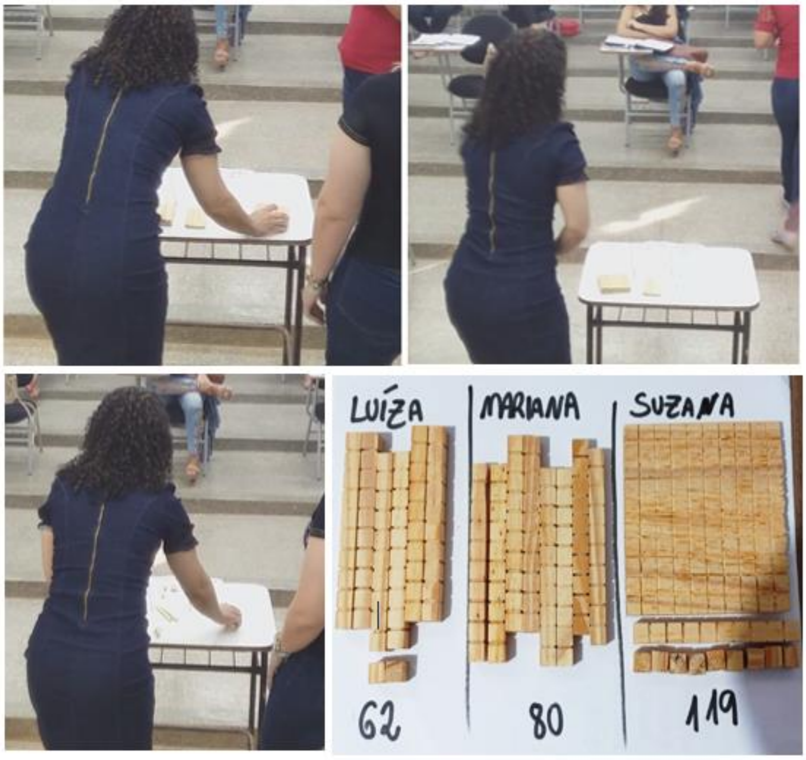
Sibipiruna: — Muita quantidade!

Então, convidamos Sibipiruna para resolver o problema utilizando o Material Dourado.

Sibipiruna: — Ai, Meu Deus do céu! Vai dar muito trabalho essa quantidade! Hora que eu virar isso meus alunos vão *piruetar* na sala!

Por fim, Sibipiruna concluiu a resolução utilizando o material pedagógico, enquanto fazia as trocas das peças do material Dourado, os demais observavam com atenção.

Figura 22. Resolução do problema jogo de cartas utilizando Material Dourado.



Fonte: Dados da pesquisa.

Portanto, com o intuito de explicar aos sujeitos de pesquisa a importância de utilizar esse tipo de recurso, em sala de aula, orientador fez o seguinte comentário:

Orientador: — Vejam que o material concreto para usar é uma operação diferente da operação escrita e, geralmente o professor é ansioso, não gosta de esperar, não gosta de deixar fazer, porque acha que está perdendo tempo.

Angico: — Dá trabalho!

Orientador: — Cansa!

Sibipiruna: — Porque tem sala que pega o material, mistura ou perde.

Orientador: — Mas isso é a maneira de ensinar. [...] eu já vi e conheço salas que os meninos têm uma organização muito boa de trabalhar com material e aprendem, claro você vai trabalhando aos poucos. Um dos últimos trabalhos que vi foi na sala da Stela! Os meninos vinham, pegavam material que ficava na sala, dividem e se cai uma pecinha no chão eles pegam e guardam. Muito cuidadosos [...] alguém hoje até comentou aqui que no início compensa deixar brincar um pouco [...] é preciso investir, deixá-los explorar o material até eles tomarem consciência [...] tudo isso é curso de tempo e o professor precisa controlar essa ansiedade.

Depois da resolução com material concreto passamos para a estratégia pedagógica com incógnitas apresentada pela Jacarandá, que resolveu após a explicação dos dados do enunciado do problema nas barras.

Jenipapo: — Olha, eu fiz minhas barras de baixo para cima!

Jacarandá: — Também fiz ao contrário, primeiro coloquei Suzana, depois Mariana e por último Luíza!"

Jenipapo: — Tem problema não?

Pesquisadora: — Não!

Acácia: — Mas assim é mais fácil porque depois dessa explicação a gente consegue ver, fica mais fácil para comparar [...]

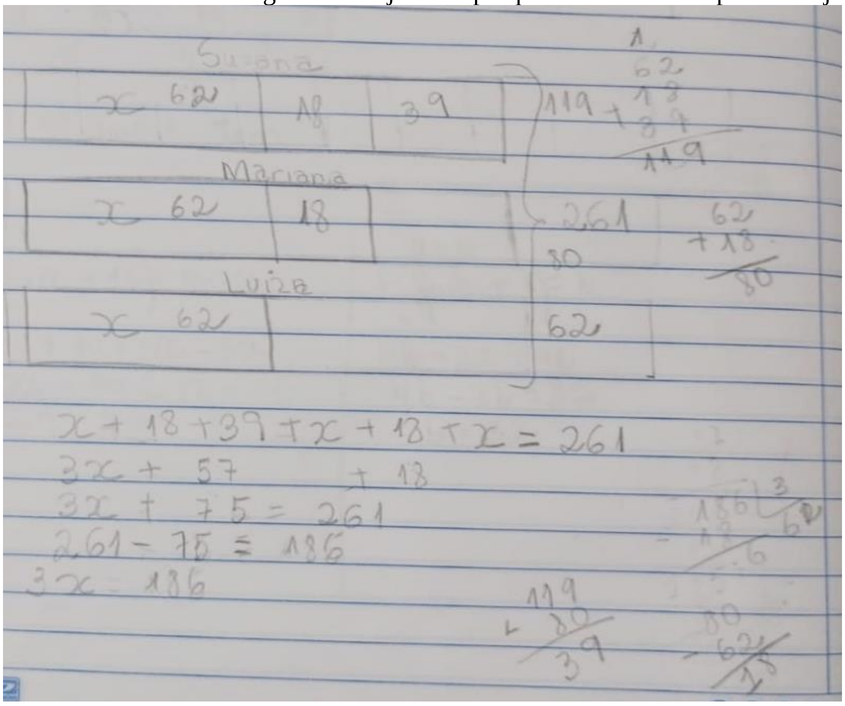
Sibipiruna: — Essa é a mais avançada já!

Jenipapo: — É usado as estatísticas!

Orientação: — Então, na resolução de problemas chamamos essas técnicas de heurísticas, que são as diferentes formas de você pensar o problema, quanto mais heurísticas uma pessoa domina, em tese ela vai ser a melhor resolvedora de problemas, porque ela consegue misturar todas essas estratégias pedagógicas".

Jenipapo: — Quando estudava administração de empresa, estudávamos muito essas fórmulas até ia bem nisso, mas depois fugi, é tipo curso de Libras se a gente não tem o aluno para praticar, esquece [...]

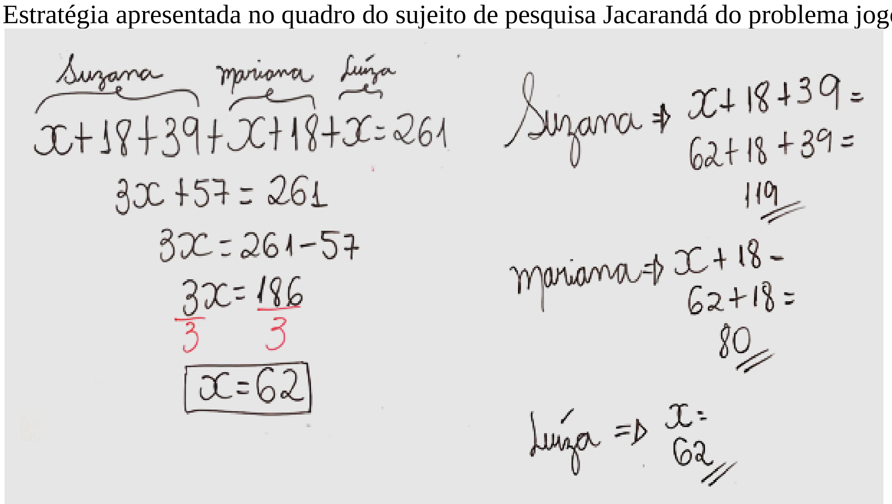
Figura 23. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Jacarandá do problema jogo de cartas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, percebemos que o problema anterior propiciou o pensamento algébrico do sujeito de pesquisa, que modificou seu modo de resolver problemas. Apresentamos sua resolução na lousa, conforme figura 24, a seguir.

Figura 24. Estratégia apresentada no quadro do sujeito de pesquisa Jacarandá do problema jogo de cartas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Outras soluções foram apresentadas, visto que os próprios sujeitos foram comentando que cada um tinha seu modo de fazer. Alguns comentaram que durante o processo, pediram ajuda.

Retomamos também sobre a importância do retrospecto, que ao conferir podemos identificar se a estratégia é adequada ou se houve equívoco de dados.

Baru: — Foi o que fiz o cálculo chegou no resultado certinho, mas na hora que eu fui fazer o retrospecto, fazer o contraprova, aí eu disse: Meu Deus como é que eu fiz isso?! Por que que não deu?!"

Jenipapo: — Parei no meio do caminho, me perdi, e não consegui voltar!

Palmeira: — Isso é o que acontece nas provas, tem questão que nós temos certeza de que está certo, mas eu fiz a conta e deu certo, mas não está!

Baru: — Sabe onde eu não iria visualizar? Que eu deveria ter somado os dois 18, para mim teria que ser só uma vez [...]

Orientador: — Em que isso ajudaria para ter esse entendimento?

Baru: — [...] a barra ajudou a visualizar e entender o problema!

Orientador: — A barra ajuda em que?

Baru: — Como aprendo visualmente não aprendo no auditivo, então aprendo visual tanto que o meu caderno aqui é cheio de cor, então a barra é mais visual, ela é mais concreta para mim poder pensar. E eu imaginava que o curso em Barras era: Oh Meu Deus! Nunca pensei que era para desenvolver exercício em Barras, eu imaginava que era algo estrondoso na matemática, e é muito simples.

Palmeira: — Também imaginava que as barras eram para sala de AEE!

Jenipapo: — Quase que desisti!

Baru: — É, também quase que eu desisti porque pensei o que vou fazer aqui com essas Barras, bem eu nem sei o que que eu imaginava.

Jenipapo: — Mas ela trouxe assim um leque a mais, amplo. Eu creio que os alunos se a gente levar para os alunos, vão abrir mais a caixinha de pensamento.

Orientador: — O que vocês indicariam para as pessoas que são recém-formadas e querem começar a trabalhar com o recurso Modelo de Barras?

Baru: — Recomendaria não levar muitos exercícios para poder desenvolver com tempo, levasse um, dois, no máximo três para ser desenvolvido bem pausadamente como vocês estão fazendo aqui conosco, até o comentei aqui com a colega que imaginei que seria um monte de exercício, mas são só 2 ou 3 com esse tempo para desenvolver. Geralmente o professor leva uma lista de exercícios para resolver e deixa lá os alunos tentando desenvolver, e a gente não consegue resolver assim com todos, dar esse tempo para observar. O meu conselho hoje seria levar no mínimo 3 ou 4 exercícios e desenvolver um de cada vez junto com eles.

Araticum: — Não importa a quantidade, mas é a qualidade que ele esteja entendendo o que estão fazendo.

Orientador: — Alguém tem mais um conselho para me dar?

Angico: — Cheguei aqui esperando que vocês fossem falar essa aqui é a barra e é assim que vai fazer esse monte de situações problemas, mas vocês estão vendo as técnicas que nós conhecemos, depois apresentam a barra e vemos o quanto a barra pode ser uma estratégia pedagógica mais fácil para entender [...] pensei que vocês fossem focar na barra, a barra, a barra, mas não vocês estão deixando nós mostrarmos nossas resoluções, então acho que é por aí, não é você chegar para o aluno e falar você vai usar a barra, mas você vai ver o que ele consegue fazer e, se ele não conseguir vai apresentando a barra ou outras estratégias pedagógicas [...].

Sibipiruna: — Te diria para observar as etapas de interpretação [...] vamos socializar as estratégias, eu já sabia um pouco sobre isso, mas agora eu reforcei. Considerar as etapas!

Jatobá: — [...] com o tempo fazê-los desenvolver as etapas para resolverem os exercícios [...].

Um dos efeitos do uso do recurso Modelo de Barras com relação ao problema 'Jogo de cartas' seria em relação a postura do professor, em se adaptar à sua descentralização, isto é, da figura do professor, assumindo este, um papel de mediador para a produção de significados dos alunos, sendo que a resolução de problemas por meio do disparador de multiestratégias, Modelo de Barras, aborda o máximo de elementos possíveis em um único problema, onde é prezado a qualidade e não a quantidade.

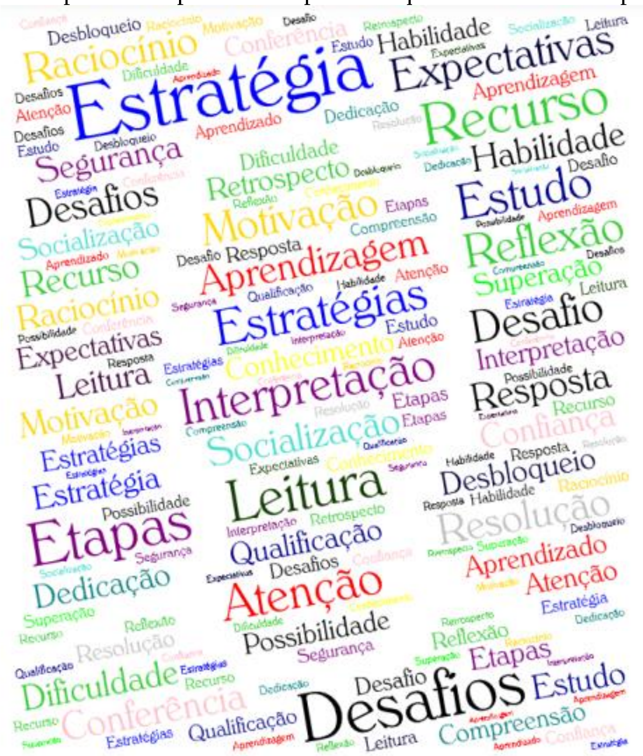
Dando continuidade ao processo de aprendizagem sobre o uso do recurso Modelo de Barras, os sujeitos de pesquisa receberam dois problemas como tarefa de casa, sendo que no próximo encontro apresentariam suas resoluções e diriam que tipo de problemas se tratavam.

Finalizando este encontro sugeriu-se aos sujeitos de pesquisa que escrevessem em seus cadernos de registro 5 palavras que resumissem sua experiência no dia.

Deste modo, elaborou-se a figura correspondendo a nuvem de palavras registradas nos cadernos dos sujeitos de pesquisa.

.

Figura 25. Nuvem de palavras a partir das 5 palavras que resumissem a experiência do curso.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Das *tags*, ou seja, palavras-chaves, apresentadas na nuvem de palavras pelos professores, as que ocorreram com maior frequência foram: aprendizagem, compreensão, desafios, estratégias, interpretação, leitura e socialização.

A partir dessas *tags* mencionadas, verificou-se que a experiência dos professores representou um desafio plausível, mostrando a possibilidade do uso do recurso Modelo de Barras para resolver problemas.

Assim, ao comparar as nuvens de palavras (Figura 2 e Figura 25), percebi que as especificidades dos professores no curso e sua relação à sua experiência com outras estratégias pedagógicas na resolução de problemas mostrou-se um desafio, contudo não uma inviabilidade aplicar o recurso Modelo de Barras na resolução de problemas.

3.1.6 Segundo encontro do curso

Antes de iniciarmos com aplicação dos problemas tipo antes-depois convidamos os sujeitos de pesquisa a apresentarem as soluções aos dois problemas que foram entregues como tarefa de casa, sendo os problemas a seguir:

3.1.7 Problema 5 –Codornas e coelhos

Na fazendinha de uma escola de Sinop há aves e animais. Uma professora levou seus alunos para contarem a quantidade de codornas e os coelhos. Eles contaram 16 cabeças e 42 pés ao todo. Quantas codornas e coelhos têm na fazendinha da escola?

Os sujeitos de pesquisa estavam empolgados por terem realizado os problemas, seus registros apresentavam-se em folhas rascunho que foram coladas em seus cadernos de registros de pesquisa. A pesquisadora inicia a conversa com perguntas que objetivavam ouvir as opiniões dos professores e suas experiências, com relação a realização dos problemas.

Pesquisadora: — Gostaria de ouvi-los com relação aos dois problemas que foram tarefa de casa. Como foi a experiência? Se fizeram em sala ou se não fizeram...”

Jacarandá: — Fiz, mas não apliquei!

Angico: — Quero colar porque não consegui fazer!

Palmeira: — Até os meus rascunhos eu grampeei junto para você ver o que eu fiz.

Pesquisadora: — Fez?

Palmeira: — Fiz muita *rabisqueira*!

No início percebi alguns professores tímidos e ansiosos, então individualmente direcionei para perguntar como forma de desinibi-los, a fim de que enunciassem sobre a resolução dos problemas.

Pesquisadora: — Mogno! Gostaria de ouvi-la, nos conte sua experiência.

Mogno: — [...]achei esses problemas bem complicadinhos! [...].

Pesquisadora: — Você tentou fazer, certo? Ao fazer o que você se atentou em fazer primeiro ao ler o problema? Como foi sua tentativa de resolução?

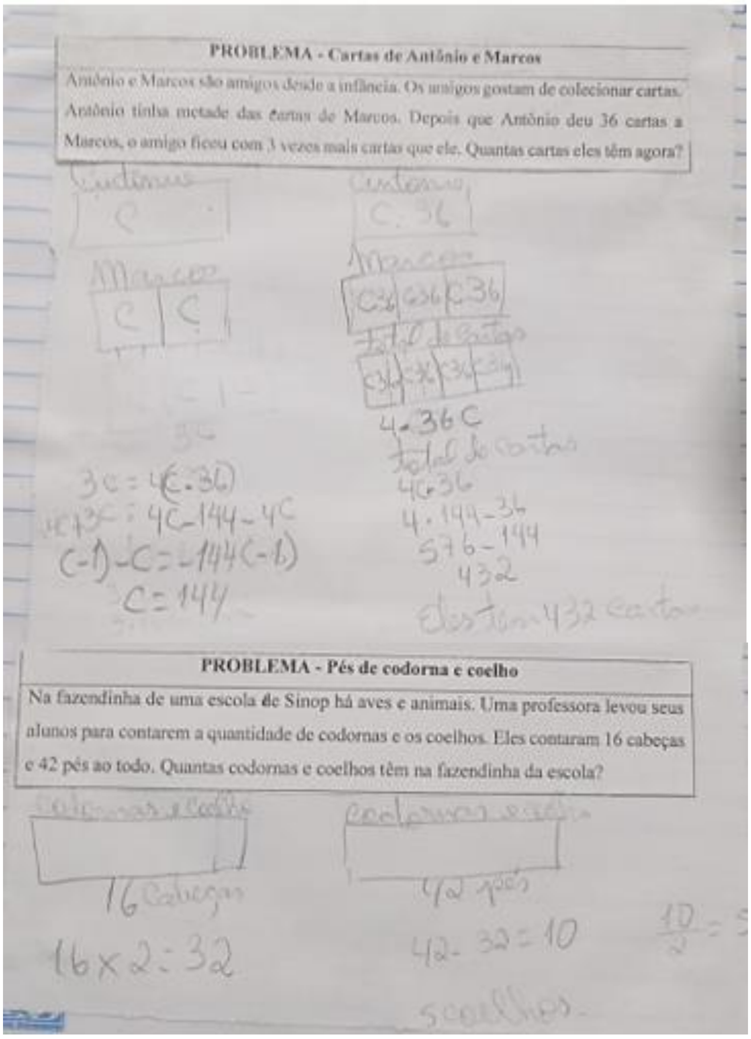
Mogno: — Ah, fui pela minha tentativa!

Pesquisadora: — Teve alguma lembrança do curso?

Mogno: — Sim, tentei. Lembra aquele último que fizemos? Lembrei mais ou menos essa barra colocando uma para o Marcos, uma para o Antônio, uma carta deixa em branco [...].

A partir da enunciação de Mogno acima, percebi que o problema foi resolvido respeitando as etapas de resolução de problemas de Polya, visto que, em seu resíduo apresentado utilizou as barras para realizar a solução, por meio da estratégia de resolução de iniciação à álgebra, conforme apresentado na Figura 26 abaixo.

Figura 26. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Mogno do problema cartas de Marcos e Antônio.



Fonte: Dados da pesquisa.

Seguido da enunciação do problema 5, Mogno apresenta sua estratégia de resolução ao problema 6.

Mogno: — Em baixo fiz o outro, fiquei um pouco perdida no dos coelhos e das codornas!

Pesquisadora: — Por que ficou perdida?

Mogno: — Nunca vi tanto bicho na minha vida, Meu Deus do céu! (risos).

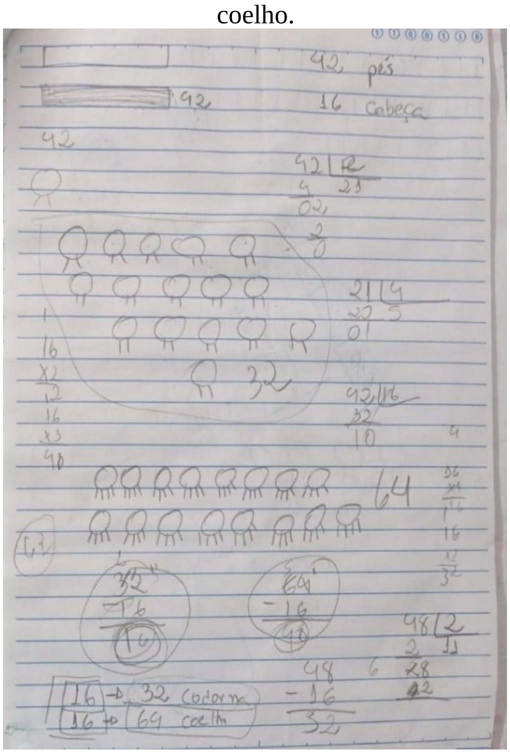
Pesquisadora: — Como você resolveu Mogno?

Mogno: — Coloquei o quadrado (referindo-se à barra) e representei 16 cabeças, 16x2 que são 32 *né*, e depois no outro quadradinho eu fiz 42-32 que foi 10 e achei os 5 coelhos, daí em diante eu já me perdi, não consegui mais [...].

Após a enunciação de Mogno, Palmeira levanta a mão e diz:

Palmeira: — Fizemos desenho! Tentei de um jeito e ela de outro (apontando para o sujeito Aroeira), nos encontramos para tentar fazer. Primeiro fiz com os 2 pés, 16 cabeças com 2 pés deram 32. Depois, fiz 16 cabeças com 4 pés, deu 64. Então, passava não chegava no 42. Tentei fazer 32 - 16 cabeças deram 16, nada haver, 64 -16 deu 48, *Vish!* Olha a multiplicação! Tentei fazer a barra, mas não deu certo. Então, ela teve uma ideia de fazer agrupamento, fizemos agrupamento 3 vezes não dava certo. Fizemos uma vez chutando de 4 em 4 e faltou deu 13. Depois deu 15. Conseguimos as 16 cabeças, foi fazendo aos poucos. Deu 5 coelhos e 11 codornas. Também fizemos desse outro jeito, pelos pés, deu mais trabalho, fazer o desenho deu mais trabalho".

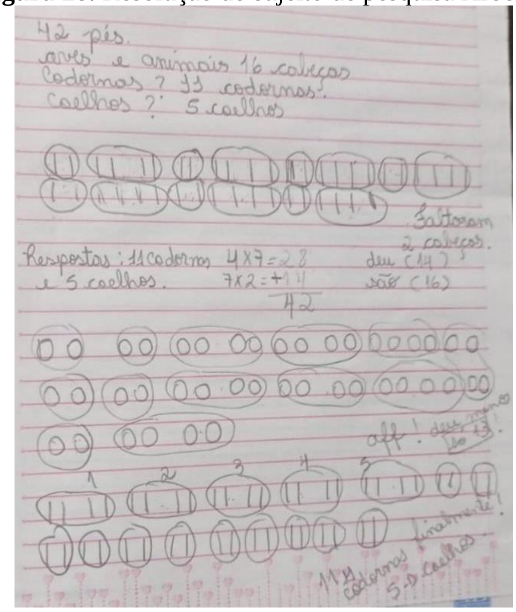
Figura 27. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Palmeira do problema pés de codorna e coelho.



Fonte: Dados da pesquisa.

Aroeira: — Mas achei mais fácil desenhando!

Figura 28. Resolução do sujeito de pesquisa Aroeira.



Fonte: Dados da pesquisa.

Por meio das produções de enunciações de Palmeira e de Aroeira apresentamos ao grupo o nome e em que consiste a estratégia de resolução Suposição.

Orientador: — A suposição é uma técnica para dar firmeza de algum lugar, que mesmo não sendo um valor verdadeiro você sabe que a conta está correta. Então, a partir dele você vai agrupando até chegar, você organiza o pensamento.

Jacarandá enunciou que também fez sua resolução por agrupamento, em sua fala:

Jacarandá: — Também fiz assim, só que coloquei 7 coelhos, 9 codornas, não dava, fui jogando 6 coelhos 10 codornas, 4 coelhos, 12 codornas, 5 coelhos, 11 codornas, até dar certo, fui controlando o número de pés e do total o número de cabeças [...].

Acácia: — Fiz esse com base numa aula que nós tivemos lá no mestrado, controlei pelas variáveis que são as cabeças, então, a princípio joguei como se tudo fosse codorna porque são as que tem o menor número de pés que são 2. Assim, encontramos 16 x 2 que resulta em 32, percebi que faltavam 10, retirei uma codorna e ficou 15, e atribuí 1 coelho. Logo, observei que quando faço isso aumenta 2 pés, então como eram 10, o resultado da diferença, peguei e dividi 10 por 2 e deu 5, achei os 5 coelhos.

Aroeira: — Oh raciocínio bom!

Palmeira: — Aí sim!

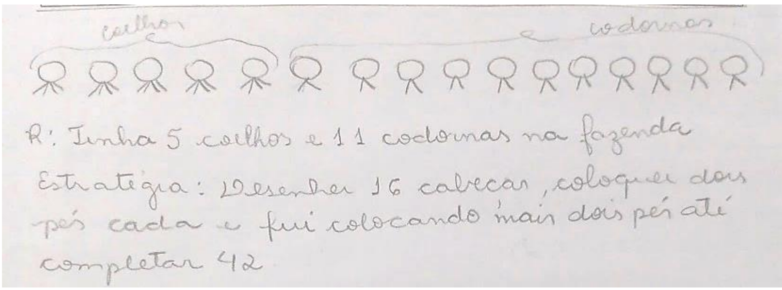
Acácia: — Apliquei na minha sala, só que não alcancei a parte das barras porque nem entendi também essas barras para explicar, mas teve uma aluna que resolveu em 20 minutos.

Pesquisadora: — Usando as barras?

Acácia: — Não. Utilizando estratégias de resolução próprias. Ela riscou 16 cabeças e foi atribuindo pés. Então, ela percebeu que estava faltando e foi colocando mais pezinhos nos que estavam sobrando, até que ela colocou os 10 e percebeu que faltava uma e dava os 5 coelhos.

Angico: — Fiz isso também. Desenhei as 16 cabeças, coloquei 2 pezinhos em cada uma. E, fui acrescentando mais 2 pezinhos em cada uma até completar os 42 pés.

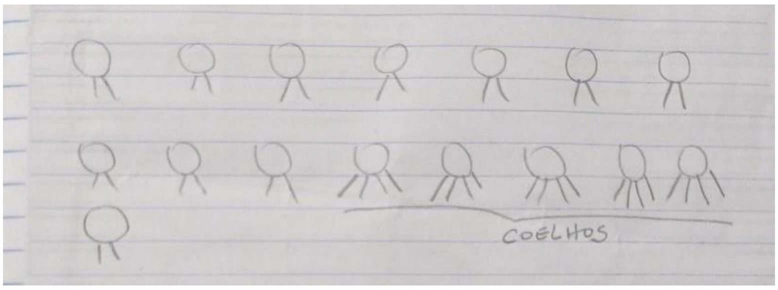
Figura 29. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Angico do problema pés de codorna e coelho.



Fonte: Dados da pesquisa.

Itaúba: — Foi bem rapidinho!

Figura 30. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Itaúba do problema pés de codorna e coelho.

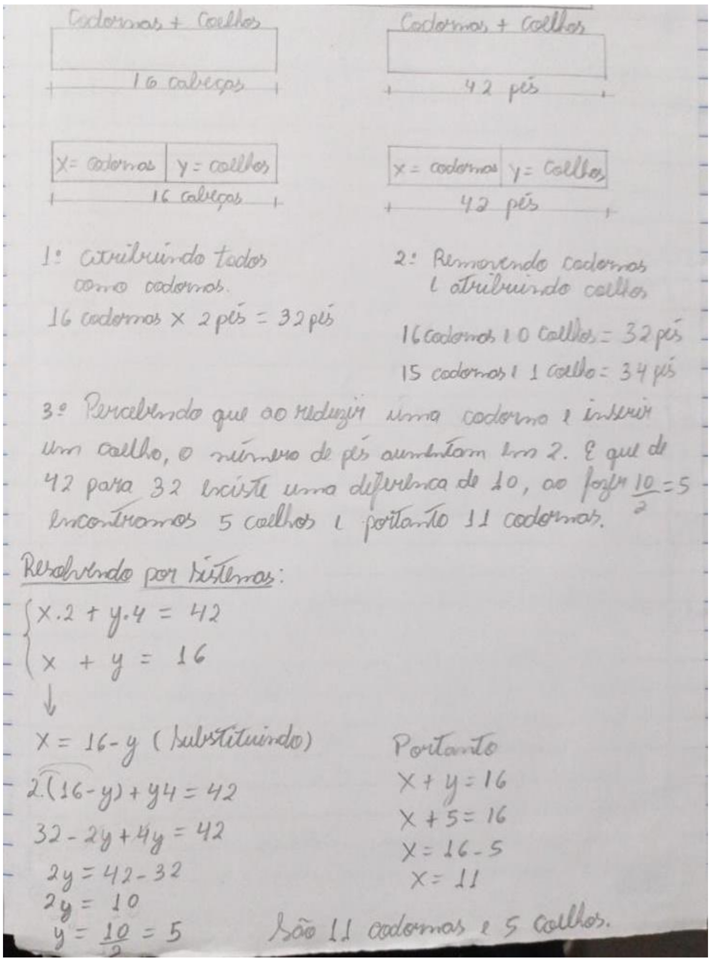


Fonte: Dados da pesquisa.

Palmeira: — Ah, assim foi mais rápido porque eu fiquei sofrendo [..] fiz tanto pé que eu não aguentava mais, quase desisti.

Acácia: — Resolvi por sistema também, mas aí já é outra etapa que a barra eu consegui ver o sistema foi quando eu desenhei as barras para enxergar o sistema.

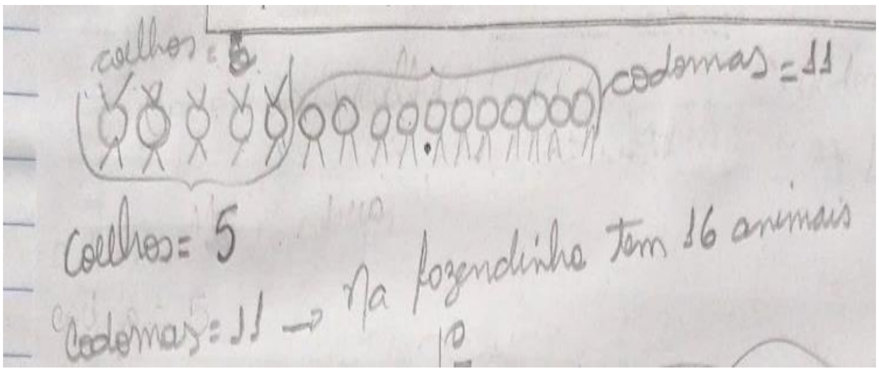
Figura 31. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Acácia do problema pés de codorna e coelho.



Fonte: Dados da pesquisa.

Jequitibá mostrou à pesquisadora sua estratégia que seguia no pensamento dos demais.

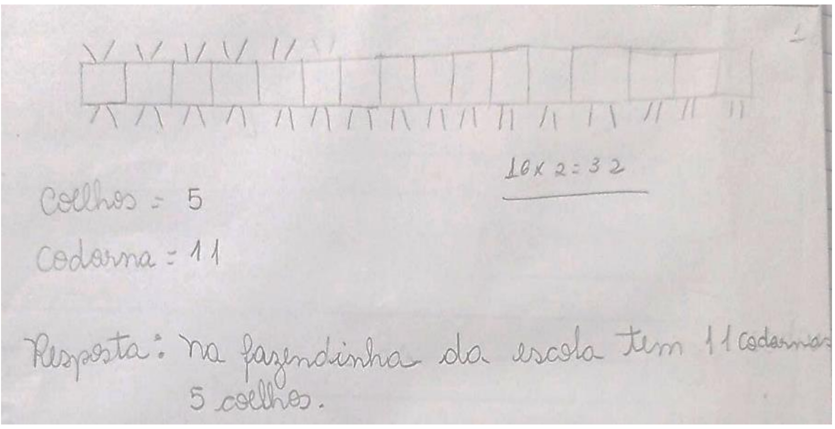
Figura 32. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Jequitibá do problema pés de codorna e coelho.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao questionar Araticum sobre qual técnica utilizou, apontou para seu registro sem comentar, contudo, apresentando resíduos das barras em sua solução.

Figura 33. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Araticum do problema pés de codorna e coelho.

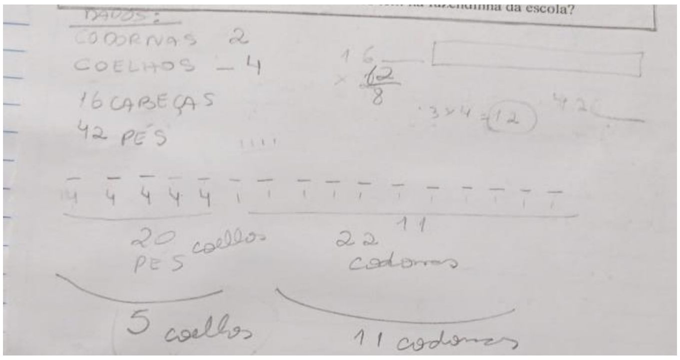


Fonte: Dados da pesquisa.

Sibipiruna apresentou sua solução.

> **Sibipiruna:** — Organizei os dados igual você chamou nossa atenção sobre as etapas de Polya, leitura do problema, interpretação, a organização dos dados e a última responder certinho, então, organizei os dados, fiz as cabeças e já coloquei 4 x 5 = 20, logo, elenquei que o resto fosse 11.

Figura 34. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Sibipiruna do problema pés de codorna e coelho.



Fonte: Dados da pesquisa.

O orientador perguntou aos sujeitos de pesquisa quem havia focado primeiro em uma técnica, sem tentar resolver.

Angico: — Quando li lá 16 cabeças, a primeira coisa que veio à mente foi desenhar as 16 cabeças. Já o segundo problema, fiquei a semana inteira tentando e não consegui.

Sibipiruna: — Iria fazer de barras, até fiz a barra de todos, depois eu falei ah não, vou fazer de barra, não vou fazer cálculo...

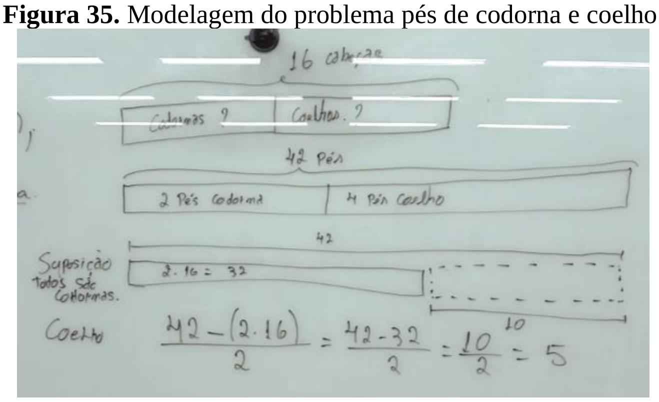
Angico: — Ainda estou penando nessas barras!

Aroeira: — Eu também!

Palmeira: — Eu também! É preciso organizar em barras, o difícil é a interpretação de organizar em barras, até consigo fazer aquela primeira leitura, mas não consigo fazer nas barras, não consigo calcular na barra".

Assim, foi feita a resolução do problema, por meio das barras na lousa, conforme figura 35 a seguir.

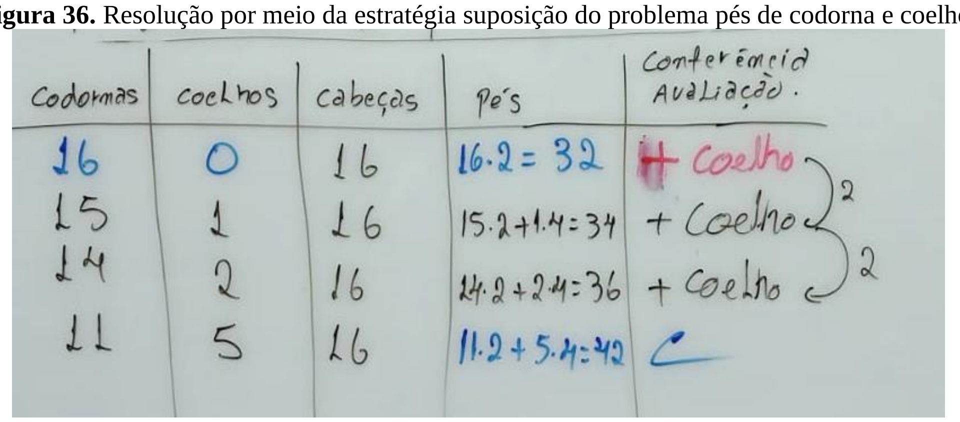
Figura 35. Modelagem do problema pés de codorna e coelho.



Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, apresentou-se aos sujeitos de pesquisa como a estratégia de resolução Suposição pode ser desenvolvida, conforme Figura 36 a seguir.

Figura 36. Resolução por meio da estratégia suposição do problema pés de codorna e coelho.



Fonte: Dados da pesquisa.

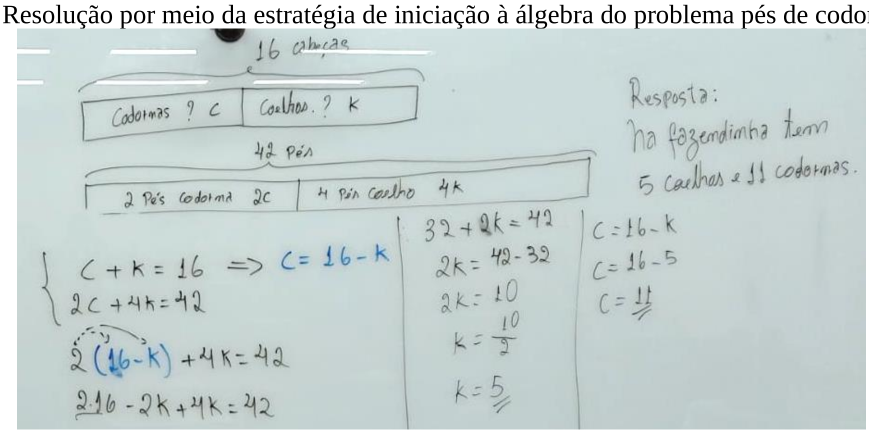
Apresentar a estratégia de resolução por Suposição foi outra maneira de produzir significado para os professores, em que para constituir o objeto é preciso refletir e organizar o pensamento.

Essa estratégia de resolução por Suposição consiste na construção de uma tabela em se escolhe se quer errar por excesso ou por falta. Desta forma, supomos que todos poderiam ser codornas ou todos são coelhos e, partir disso, já é possível seguir para mais ou para menos a próxima suposição.

Por vezes acaba-se tentando adivinhar a resposta do problema sem pensá-lo, sendo que na resolução de problemas é primordial ter confiança para seguir as etapas e que, não necessariamente, é obrigado a acertar aquela técnica, que pode haver outras, é preciso testar hipóteses até o final. Além disso, na escola ao contrário, às vezes, acha-se que é preciso acertar, tem que ser rápido, enquanto é melhor organizar o pensamento.

Vale ressaltar que, durante o desenvolvimento das soluções deste problema, os professores sugeriram que os sujeitos do problema, coelho e codornas, não fossem com a mesma inicial, pois poderiam utilizar incógnitas para apresentar a estratégia de resolução de iniciação à álgebra e talvez seria confuso aos alunos. Assim, decidiu-se alterar o problema no livro, onde havia codorna agora é galinha. Por isso, aproveitou-se a oportunidade para desenvolver a estratégia de resolução por meio de incógnitas, conforme representação da Figura 37 a seguir.

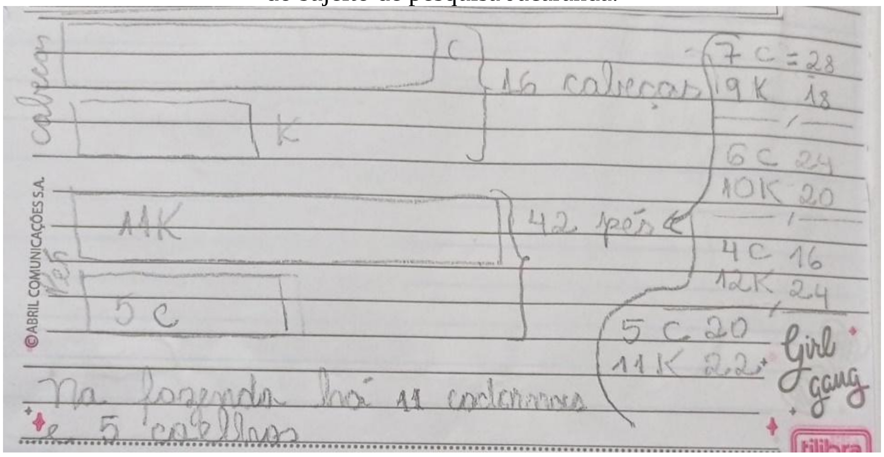
Figura 37. Resolução por meio da estratégia de iniciação à álgebra do problema pés de codorna e coelho.



Fonte: Dados da pesquisa.

Jacarandá comentou que sua solução foi elaborada parecida com a apresentada no quadro, assim pediu para a pesquisadora ir até sua carteira para verificar como havia desenvolvido. Diante do registro, percebi o uso de incógnitas em que resolveu seu problema, por meio da estratégia de resolução de iniciação à álgebra, conforme pode ser visto na Figura 38, em que as codornas foram representadas pela letra k e coelhos pela letra c, para não haver confusão nos sujeitos do problema, sua solução foi influenciada pelo Modelo de Barras.

Figura 38. Resolução por meio da estratégia de iniciação à álgebra do problema pés de codorna e coelho do sujeito de pesquisa Jacarandá.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao fim das soluções percebe-se que a maioria dos sujeitos de pesquisa não sabiam organizar os dados do enunciado do problema, fazendo com que dificultasse a escolha de uma estratégia pedagógica para a resolução do problema, uma vez que o pensamento estava desorganizado.

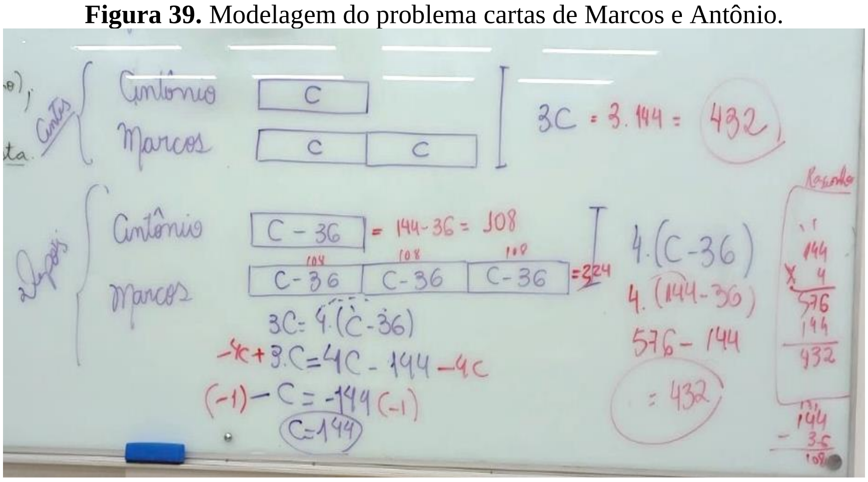
O problema 5, Codornas e coelhos, é um problema do tipo comparação. A partir deste, percebi que um dos efeitos do recurso Modelo de Barras foi a flexibilidade dos professores em usar outros recursos e materiais manipuláveis, por exemplo recortes impressos de imagens, contudo procuraram resolver com as barras.

3.1.8 Aplicação do problema 6 – Cartas de Antônio e Marcos

Antônio e Marcos são amigos desde a infância. Os amigos gostam de colecionar cartas. Antônio tinha metade das cartas de Marcos. Depois que Antônio deu 36 cartas a Marcos, o amigo ficou com 3 vezes mais cartas que ele. Quantas cartas eles têm agora?

A pesquisadora iniciou com a leitura e modelagem do problema utilizando as barras. O objetivo deste problema foi apresentar problemas tipo antes-depois. Para isso, a pesquisadora fez a leitura do problema, enfatizando cada etapa da resolução. Assim, organizava os dados do problema numa barra do antes e outra para o depois, sendo o problema composto por dois sujeitos, Antônio e Marcos.

Figura 39. Modelagem do problema cartas de Marcos e Antônio.



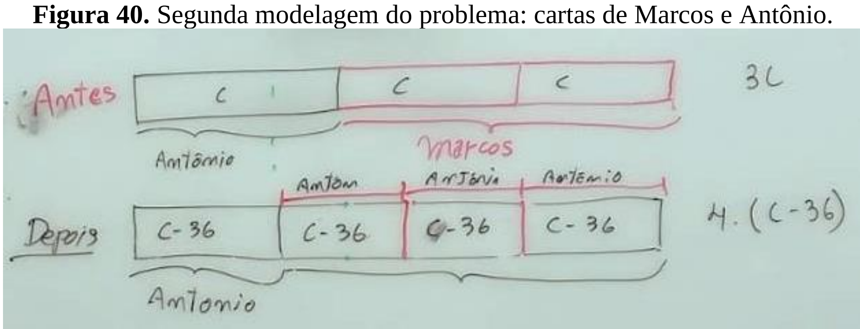
Fonte: Dados da pesquisa.

Este problema foi resolvido por meio da estratégia de resolução de iniciação à álgebra.

Angico: — Não consegui entender! Não visualizei na barra ainda.

Os sujeitos de pesquisa tiveram dificuldade para compreender a resolução por meio da modelagem apresentada, assim procurei modelar o problema de outra forma, mostrando que é possível ter esse movimento com as barras.

Figura 40. Segunda modelagem do problema: cartas de Marcos e Antônio.



Fonte: Dados da pesquisa.

Percebe-se que esta modelagem facilitou a compreensão do problema, possibilitando acessar os sujeitos de pesquisa.

Angico: — Acácia explica aqui!

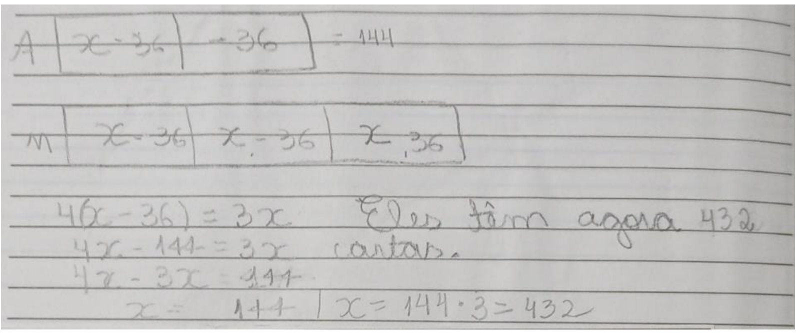
Acácia explica como entendeu o problema ao sujeito Angico. Após a explicação entre os sujeitos, nota-se nas expressões satisfação, pois alguém conseguiu ensinar e alguém conseguiu aprender, logo aprendemos com o outro.

> **Jenipapo:** — Agora consegui entender! [...] e agora com a explicação de vocês o leque se abriu! E, então você cria outras estratégias, mas olha a dificuldade dos nossos alunos explicando de uma única forma [...] percebi também que não concluí meu problema porque cheguei até o 108, mas por falta de confiar na minha estratégia eu desisti [...].

Nesta última enunciação de Jenipapo, pode-se obter indicativos de possíveis efeitos do uso do recurso Modelo de Barras, empatia, do professor se colocar no lugar do aluno; valorização das heurísticas por meio dos alunos; e confiança ao elaborar técnicas de resolução próprias.

Foi possível também chegar a uma conclusão que consideramos importante para a pesquisa, o nome do produto educacional, para Modelo de Barras Disparador de Multiestratégias para resolução de problemas que se originou dessa enunciação, a qual o sujeito disse “e, então você cria outras estratégias”, visto que o Modelo de Barras é tido como um disparador de outras estratégias de resolução. Por fim, Jacarandá apresenta sua solução que pode ser visualizada a partir da figura a seguir.

Figura 41. Resíduo no caderno de registro do sujeito de pesquisa Jacarandá do problema cartas de Marcos e Antônio.



Fonte: Dados da pesquisa.

Aqui, percebi que o sujeito de pesquisa seguiu as etapas de resolução pela forma que organizou suas barras, distribuindo os dados do enunciado do problema juntamente com o uso de incógnita, chegando à estratégia de resolução de iniciação à álgebra.

A utilidade desse problema aos sujeitos de pesquisa foi mostrá-los sobre a importância do pensamento algébrico, sendo que os próprios sujeitos perceberam, nota-se em suas enunciações.

Aroeira: — É mais fácil para eles interpretarem.

Sibipiruna: — O aluno mesmo vai descobrindo estratégias econômicas.

Palmeira: — Estou nesse processo de sistematizar e de avançar (risos), confesso que não sabia nada disso, estou aprendendo aqui usar as letrinhas.

Acácia: — [...] sem falar que eles vão percebendo que o tempo que eles levam para fazer os desenhos é maior do que fazer uma expressão algébrica.

Estas enunciações, apresentam reflexões dos professores com relação ao uso do recurso Modelo de Barras, já em sua sala de aula, sendo um disparador da construção do pensamento, raciocínio e abstração do processo de produção de significado. Assim, os professores demonstraram uma preocupação com o aprendizado dos alunos e não com o conteúdo em si, acreditando na capacidade do aluno de ter uma forma de pensar e expressar suas ideias, protagonista, como a própria BNCC propõe, do seu processo de aprendizagem.

3.1.9 Aplicação do problema 7 – Tanque de combustível

Apresentamos o problema 7 que traz no enunciado: *Stela gastou três quintos do tanque de combustível e precisou colocar 36 litros para completá-lo antes de enchê-lo. Quantos litros de combustível restavam no tanque?*

O problema foi entregue. Os sujeitos de pesquisa tiveram 20 minutos para dispararem suas estratégias de resolução. Durante a leitura do problema, os sujeitos de pesquisa começaram a indagar a pesquisadora de que como ela havia criado o problema, se não poderia alterar a escrita, pois estava confuso a parte "*completá-lo antes de enchê-lo*".

Angico: — Não teria que estar dizendo no problema que o tanque estava cheio, está confuso!

A fala inicial da pesquisadora com a leitura do problema foi enfatizar sobre a importância da compreensão dos dados do problema, que apenas havia uma redundância para que leitor percebesse que era um dado importante, uma vez que havia um pouco de combustível no tanque e caberia mais até enchê-lo.

Após essa fala os professores compreenderam que o problema se tratava de um antes e uma depois. Em se tratando de um problema envolvendo o todo, a pesquisadora reforça em sua fala sobre a importância de apresentar as partes desse todo. Assim, utilizou um copo descartável e água como recursos manipulativos, sendo uma representação visual e acessível de trabalhar a leitura do problema, na direção de representar a quinta parte do tanque de combustível.

Figura 42. Estratégia usando um copo descartável para trabalhar problemas do tipo antes-depois.

Fonte: Dados da pesquisa.

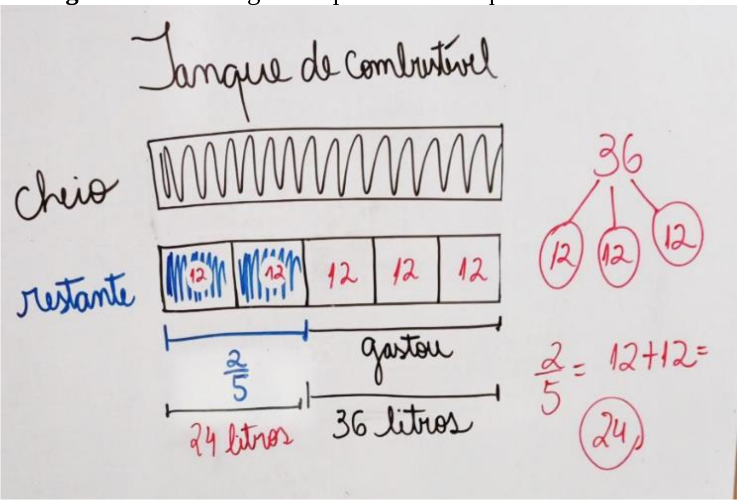
> **Jenipapo: —** Segura isso aí menina preciso tirar uma foto disso! (apontando para o copo que a pesquisadora apresenta para compressão de partes de um todo).

A partir dessa demonstração, foi possível estabelecer um espaço comunicativo, no qual todos os envolvidos na discussão pareciam concordar de que tratava de um problema do tipo antes-depois.

Com as soluções finalizadas, a pesquisadora inicia o desenvolvimento da resolução do problema, na lousa modelando com as barras e apresentando uma, por meio dos números conectados ou “Number Bonds[4], conforme figura a seguir.

[4] É a adição de dois números que se somam para dar a soma. Usando ligações numéricas, pode-se dizer instantaneamente a resposta sem a necessidade de cálculos reais.

Figura 43. Modelagem do problema Tanque de combustível.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao fim do processo de ensino desta solução, a pesquisadora questiona os professores o que acharam deste problema, da solução desenvolvida, assim desencadeando alguns comentários.

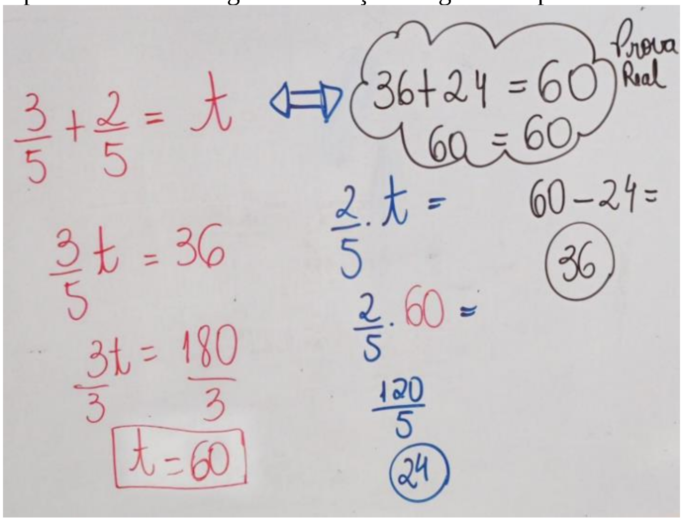
> **Aroeira:** — Sim, agora ficou mais claro porque aquela hora não tinha conseguido visualizar os dados.
>
> **Palmeira:** — Eu sempre voltava para casa com dúvida.
>
> **Jenipapo:** — Vocês explicando aqui eu já estou tendo uma ideia para o meu autista, de trabalhar no concreto fazendo a barra numa caixa e levar ele nessa quantidade.

A partir da enunciação de Jenipapo, apresentou-se o recurso pedagógico Régua de Cuisenaire, um material manipulável composto de barras colorida que facilita a visualização para o ensino e aprendizagem, principalmente por introduzir as operações matemáticas, de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Nestas enunciações, percebi que os professores novamente procuraram se colocar no lugar do aluno. Assim a pesquisadora elucida aos sujeitos de pesquisa como apresentar outras estratégias pedagógicas é significativamente produtivo para o desenvolvimento da aprendizagem, atingindo mais alunos em uma sala de aula.

Como não tiveram soluções utilizando incógnitas, a pesquisadora apresenta outra solução ao problema, por meio da estratégia de resolução de iniciação à álgebra. Contudo, se tratando de 4°, 5º e 6º anos, optou-se por utilizar uma incógnita que representasse o sujeito, neste caso a letra t, para tanque de combustível.

Figura 44. Resolução por meio da estratégia de iniciação à álgebra do problema Tanque de combustível.



Fonte: Dados da pesquisa.

Pela figura acima é possível verificar que abordei sobre a importância da prova real, sendo que nas etapas seria o retrospecto. Observei que a grande maioria dos sujeitos de pesquisa não tinham domínio em utilizar incógnitas, assim relataram que pouco trabalhavam iniciação algébrica.

A pesquisadora questiona novamente:

Pesquisadora: — Como vocês se sentiram ao se depararem com a dúvida por não terem compreendido na primeira modelagem o problema?

Jacarandá: — Me sinto mal! Essa semana me deparei, não era aula de matemática, mas era outro assunto e eles ficaram olhando, olhando para mim, fui lá no quadro e desenhei interrogações, é isso que estou enxergando em vocês. Retomei tudo para explicar, porque quando eu percebo que eles não estão entendendo, eu busco outro modo, por exemplo, em Matemática, eu vou lá e desenho, meu quadro vira uma bagunça!

Pesquisadora: — E se você não sabe de outro modo ensinar a Matemática, você propõe um novo momento?

Jacarandá: — Faço para eles assim, faça do jeito que você entendeu, como que você resolveria. Aí eu tenho aquele aluno que desenha, aluno que já faz direto, eles...

Pesquisadora: — O que é o fazer direto?

Jacarandá: — Fazer direto já é a expressão algébrica, não sei como é que chama...

Angico: — Algoritmo!

Jacarandá: — Tem aquele que desenha, que faz risquinho, aquele que pega palito, que conta nos dedos, e é assim...

Pesquisadora: — Nas suas aulas de Matemática você utiliza material concreto?

Jacarandá: — Sim!

Acácia: — Por isso da importância de conversar, agora nesse momento que a gente está trabalhando com divisão de turmas por causa da Pandemia a gente tem um tempo maior de ver aluno por aluno, e aí você perguntar para ele porque tem aluno que faz direto. Como que você sabe se o aluno entendeu? Conversando com ele, você copiou do colega ou de outro lugar? Vamos observando a explicação dele e verificar se ele chegou em alguma estratégia mesmo, bem elaborada, porque às vezes nós não temos esse ponto de vista, porque chegamos e queremos ver o resultado, olha não está certo, faz de novo.

Jacarandá: — Nós na verdade somos tendenciosos, queremos que eles resolvam do nosso modo.

Pesquisadora: — Vocês procuram ir à mesa deles ou são mais apegados à lousa?

Jenipapo: — Não, procuro ir à mesa [...].

Tarumã: — Não consigo ficar na mesa, já me acostumei está sempre do lado do aluno para mim ver os mínimos detalhes, o que ele está escrevendo, para eu já perceber desde a escrita até o fim da atividade o que ele está desenvolvendo, e com isso vou tomando nota daquilo que eu vejo que eu preciso melhorar com ele instigar mais ele a escrita, enfim...

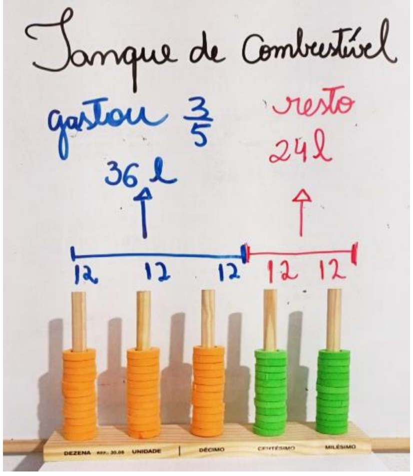
Jenipapo: — Às vezes eu também, para tirar dúvida e levar ele a fazer a estratégia dele, deixo ele ir para o quadro para fazer a estratégia dele.

Aroeira: — Eles amam mesmo!

Jacarandá: — Eles adoram! Esses dias dei problemas para eles e cada um foi resolver no quadro. Então, uns vão lá do jeito que eles fizeram, eles desenham, eles riscam, eles resolvem.

Assim, apresentei aos sujeitos de pesquisa uma outra estratégia pedagógica utilizando o Ábaco como suporte para representar o tanque de combustível, sendo que cada pino representa a quinta parte do tanque de combustível. Assim cada pino tem 12 argolas, logo a parte laranja seriam os três quintos do tanque combustível que Stela gastou, ou seja, são 36 litros de combustível, já os dois quintos, parte verde, seriam os 24 litros restantes.

Figura 45. Resolução usando o ábaco do problema Tanque de combustível.



Fonte: Dados da pesquisa.

Percebi nos sujeitos de pesquisa uma interação maior com a utilização das barras neste problema, pois apresentaram suas resoluções por meio delas, como também demonstraram interesse em aplicar o recurso modelo de Barras e as diversas formas de introduzir os materiais concretos, na prática pedagógica.

> **Jenipapo:** — Deixa ver se entendi, preciso aprender direitinho essa estratégia porque vai dar certinho para meus alunos com dificuldade!
>
> **Sibipiruna:** — Ah, quero aprender todas as estratégias, se não der certo com essa, faço com aquela, todos vão aprender!

Nesta perspectiva, considero a vontade de aprender como um efeito do recurso Modelo de Barras, uma vez que contribuiu no modo do professor resolver problemas, como também, no seu modo de ensinar, ocorrendo desta forma uma mudança na postura desses professores, com relação à sua prática docente.

Sob os óculos dos professores percebi que puderam aperfeiçoar sua prática pedagógica por meio deste problema, pelo fato de experenciarem a manipulação de materiais pedagógicos, associando estes com a resolução de problemas como alternativa que propicia a melhor compreensão do processo de produção de significado.

3.1.10 Aplicação do problema 8 – Fábrica de máscaras

Iniciamos este momento com a resolução do problema 8, conforme abaixo:

Em uma fábrica de máscaras em Sinop, tinha 750 unidades no estoque. Na segunda-feira foram confeccionadas 350 máscaras. Na terça-feira foram confeccionadas três vezes a quantidade da segunda-feira. Na quarta-feira foram doadas ao pronto socorro da cidade 1500 máscaras. Quantas máscaras restaram no estoque da fábrica?

Sugerimos 20 minutos aos sujeitos de pesquisa para a resolução deste problema. Passado metade do tempo, a equipe de pesquisa começou a circular pelas mesas com o intuito de ajudar quando houvesse dúvidas. Então, percebi um deslanchar do grupo que estava a resolver o problema, isto é, estavam quase todos com suas resoluções elaboradas e, o mais incrível foi que a maioria havia modelado com as barras.

Ao fim do tempo previsto, convidei Jequitibá para a leitura do problema ao grupo. Ao término da leitura, a pesquisadora resgata junto aos sujeitos de pesquisa sobre as etapas de Polya, para efetuar a modelagem dos dados do problema por meio do recurso Modelo de Barras, visto que todos apresentavam a ideia em seus cadernos de registros.

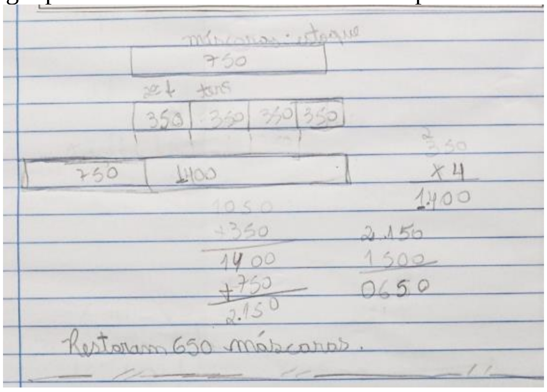
Sempre dialogando com os sujeitos de pesquisa, pois esperava indicações de como iniciar a modelagem, sendo que se trata de um problema do tipo antes-depois.

Os sujeitos me ajudaram a modelar as barras na lousa, alguns ditavam, outros apontavam, até que todos os dados fossem visualizados na barra. Primeiramente, desenhei a barra com o valor do estoque inicial, a cada dia da semana aumentava uma barra e, assim percebiam que o estoque da fábrica tinha uma quantidade antes e uma outra no final.

Dessa vez, não convidei os professores para apresentarem suas soluçõess, pois a intenção aqui era seguir o pensamento que já haviam iniciado com as barras.

A seguir, estão elencadas figuras com as soluções dos sujeitos de pesquisa, antes da modelagem na lousa, feita pela pesquisadora.

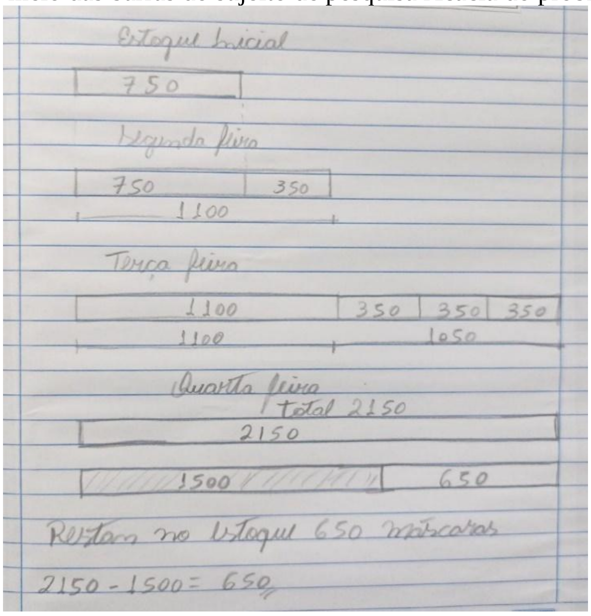
Figura 46. Estratégia por meio das barras da Aroeira do problema fábrica de máscaras.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao verificar a modelagem de Aroeira, percebi que modelou cada dado do problema, conforme o esperado, uma vez que apresentou dessa forma entendimento do enunciado do problema, pela distribuição das barras.

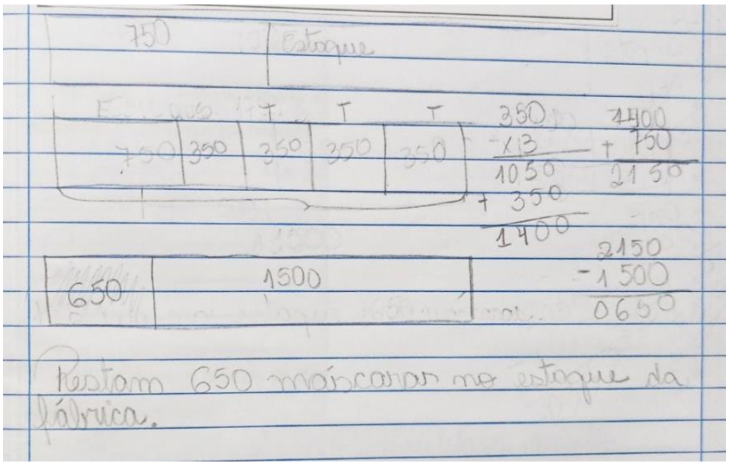
Figura 47. Estratégia por meio das barras do sujeito de pesquisa Acácia do problema fábrica de máscaras.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesta solução verifiquei que Acácia modelou os dados do problema conforme os dados são apresentados no problema, sendo que a distribuição das barras apresenta a compreensão do problema.

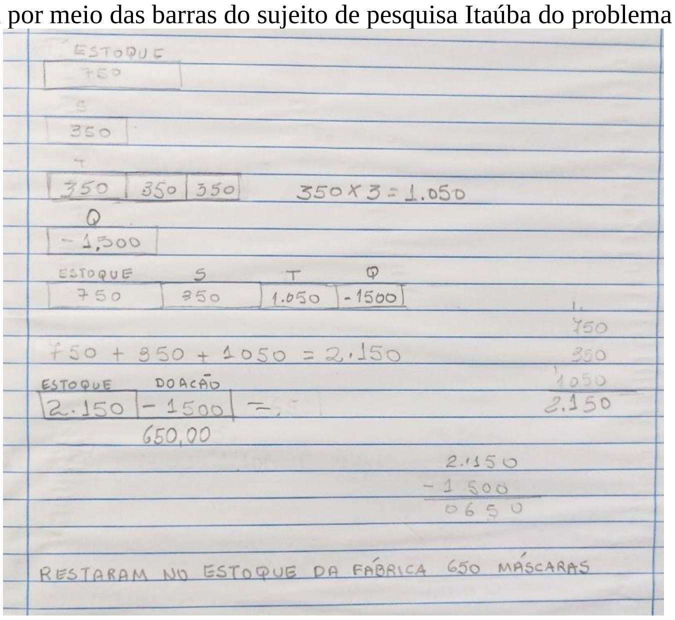
Figura 48. Estratégia por meio das barras do sujeito de pesquisa Jacarandá do problema fábrica de máscaras.



Fonte: Dados da pesquisa.

Observei que na modelagem de Jacarandá houve identificação nos dados do problema, uma vez que a barra foi modelada conforme o tipo de problema antes-depois.

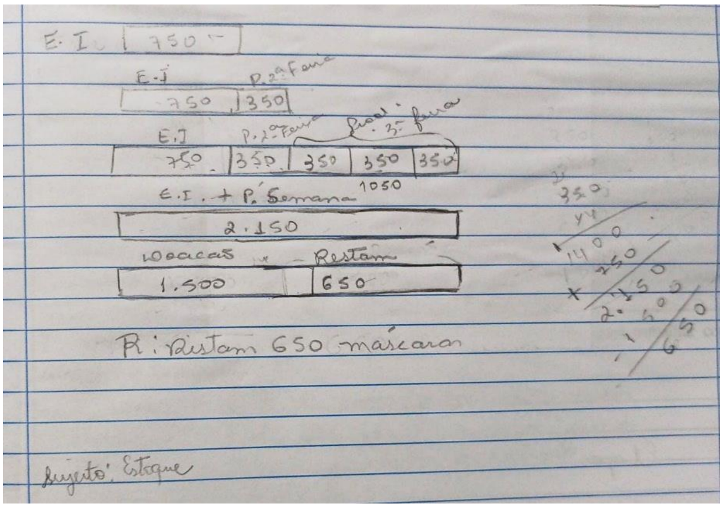
Figura 49. Estratégia por meio das barras do sujeito de pesquisa Itaúba do problema fábrica de máscaras.



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir desta modelagem, Itaúba modela e resolve, ao mesmo tempo, sendo as barras a base para seu cálculo aritmético.

Figura 50. Estratégia por meio das barras do sujeito de pesquisa Angico do problema fábrica de máscaras.

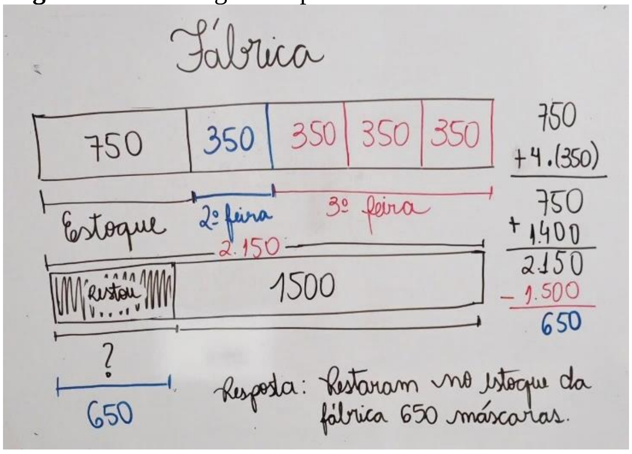


Fonte: Dados da pesquisa.

Na resolução de Angico percebi que ela procurou seguir rigorosamente as quatro etapas de resolução de problema em que identifica os dados do enunciado, modela as barras, propõe uma resolução com aritmética, concluindo com a resposta do problema, após o retrospecto.

Assim, terminei a resolução do problema na lousa seguindo as etapas de resolução de problemas de Polya, dialogando com os sujeitos de pesquisa e usando o recurso Modelo de Barras para abordar o problema de forma integral, explorando ao máximo suas possibilidades e justificando cada etapa da resolução, conforme figura abaixo:

Figura 51. Modelagem do problema fábrica de máscaras.



Fonte: Dados da pesquisa.

À medida que estava a modelar o problema na lousa, ouvia os murmurinhos entre os professores que diziam ter achado este problema fácil de resolver, com o recurso Modelo de Barras:

Pesquisadora: — Por que vocês acharam esse problema fácil?

Angico: — Porque aparecem mais dados!

Aroeira: — Aparecem mais informações!

Por meio das falas dos professores, ao modelarem o problema, percebi que estão em outras direções, apresentaram algumas especificidades ao fazerem a compreensão, justificando que faltam dados, estão implícitos ou não parentes, para produzir significado ao problema.

Assim, decidi retomar à primeira etapa de resolução de problemas: leitura e compreensão do problema, e, por isso, reforcei a importância de segui-las, justamente porque a primeira é o encaminhamento para a elaboração da estratégia, logo, sequência para a solução. Assim, ao entender do que se trata, qual/quais é/são o(s) sujeito(s) e os dados, praticamente será possível chegar próximo, ou, ao resultado do problema.

Observei que os efeitos do recurso Modelo de Barras sinalizados neste problema, foram os de promover exercício de reflexão e ressignificação do pensamento, a partir de suas heurísticas.

3.3 Sinalizações dos professores após aplicação do questionário de avaliação do curso

Ao fim da aplicação dos problemas, entreguei aos professores o questionário de avaliação do curso (Anexo 4). Com a aplicação do questionário, pude avaliar percepções e sinalizações dos professores em relação ao Modelo de Barras, e, principalmente, minha postura ao ensinar o método, estava diante de um grupo cheio de expectativas, precisei lidar com a heterogeneidade dos professores.

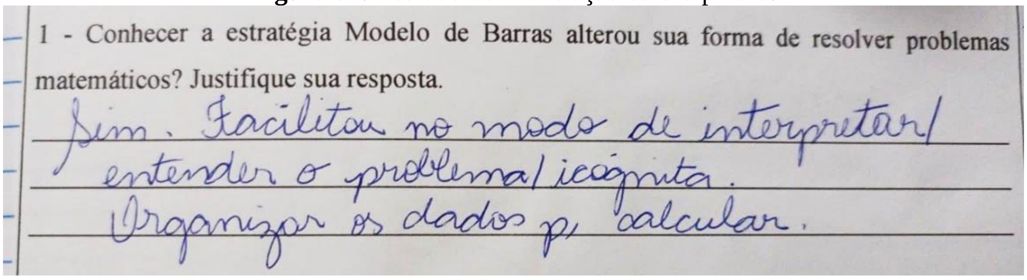
Acredito que alcancei o objetivo de ensinar os professores em usar o recurso Modelo de Barras para resolver problemas, pois os professores interagiram com comprometimento e desenvolveram heurísticas que tomaram consciência de suas próprias habilidades cognitivas.

Ao olhar para os resíduos de enunciações dos professores, percebi quantas direções os sujeitos estavam naquele momento, bem como a riqueza de possibilidades que ofertam e entre elas a de aprender. O ser humano é um sujeito que aprende. Logo, a capacidade de aprender provém de ambientes favoráveis onde o sujeito aprendente pode construir e/ou responder de modos diferentes a uma situação-problema.

O pressuposto fundamental da aprendizagem está no envolvimento da vontade. Primeiro tive que (re)aprender para depois ensinar, prefiro dizer convidar a conhecer a estratégia, não como ouvinte, mas modelando o problema, usando as etapas de Polya, tomando-as como hábito. E a razão é bem simples: uma vez que a tomada de consciência das etapas para resolução de problema, tome como forma o processo pode ser conduzido de forma simples a essa realidade tão complexa e abstrata.

Assim, diante dos resíduos de enunciações, percebi que os professores sinalizaram algumas mudanças, ainda recentes, contudo, próximas à sua forma de resolver problemas.

Figura 52. Resíduo de enunciação da Sibipiruna.

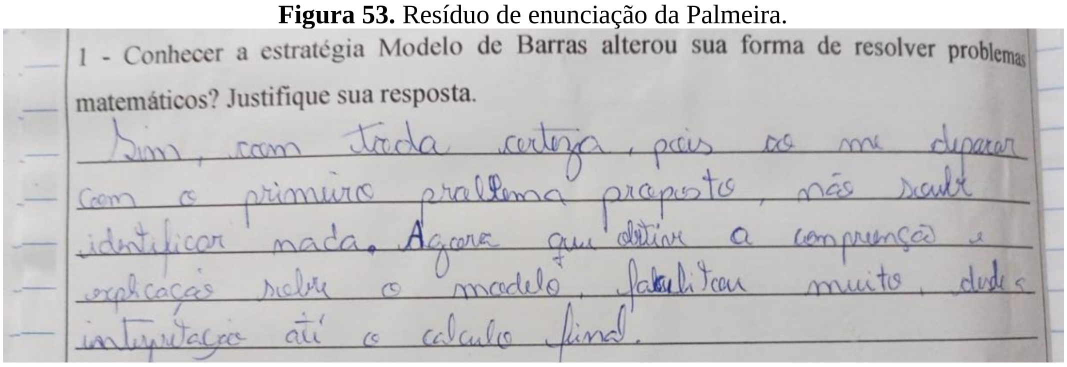

1 - Conhecer a estratégia Modelo de Barras alterou sua forma de resolver problemas matemáticos? Justifique sua resposta.

Sim. Facilitou no modo de interpretar/ entender o problema/ incógnita. Organizar os dados p/ calcular.

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, no resíduo de enunciação da questão 1, percebi que a Sibipiruna e Palmeira afirmaram que o Modelo de Barras "facilitou" sua forma de resolver problemas.

Figura 53. Resíduo de enunciação da Palmeira.

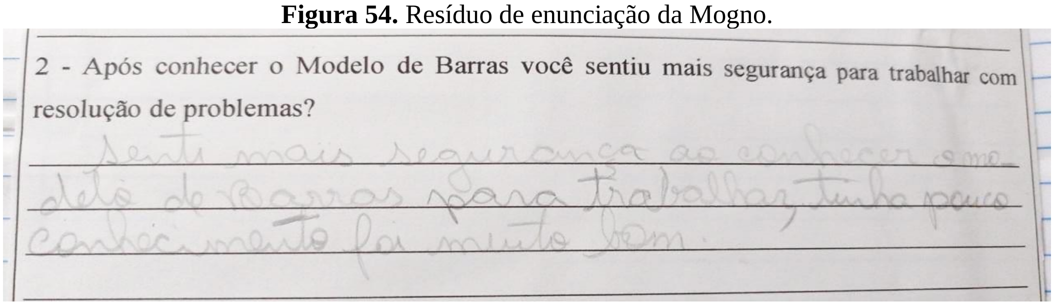

1 - Conhecer a estratégia Modelo de Barras alterou sua forma de resolver problemas matemáticos? Justifique sua resposta.

Sim, com toda certeza, pois ao me deparar com o primeiro problema proposto, não soube identificar nada. Agora que obtive a compreensão e explicação sobre o modelo, facilitou muito, desde a interpretação até o cálculo final.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 2, os professores sinalizaram ter "mais segurança" para trabalhar com resolução de problemas.

Figura 54. Resíduo de enunciação da Mogno.


2 - Após conhecer o Modelo de Barras você sentiu mais segurança para trabalhar com resolução de problemas?

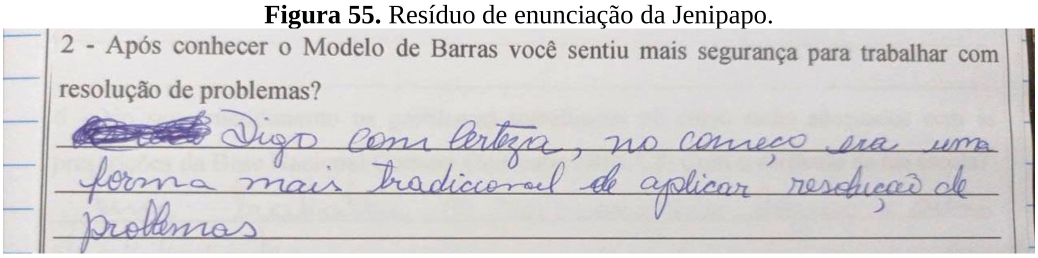
Senti mais segurança ao conhecer o modelo de Barras para trabalhar, tinha pouco conhecimento foi muito bom.

Fonte: Dados da pesquisa.

No resíduo de enunciação da Jenipapo, além da segurança, outro indicativo ficou explícito, a autorreflexão sobre sua "forma tradicional de ensinar e aplicar sempre as mesmas técnicas na resolução de problemas". Entendo que o efeito do recurso Modelo de

Barras, para aquele momento da professora foi o de (re)pensar sua prática docente, buscando conhecer e aprender outras estratégias pedagógicas.

Figura 55. Resíduo de enunciação da Jenipapo.



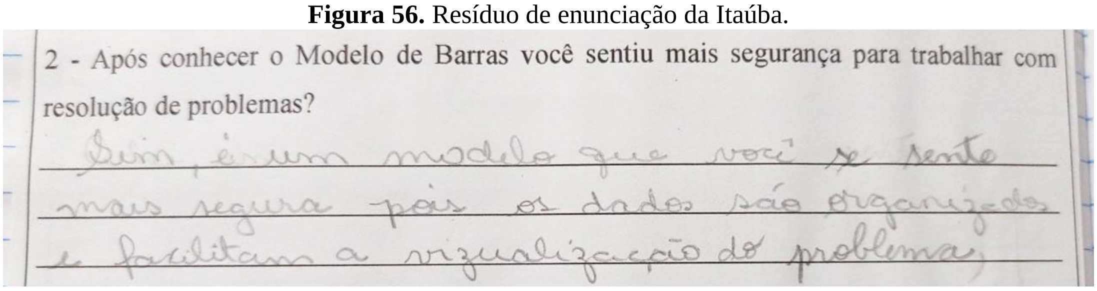
2 - Após conhecer o Modelo de Barras você sentiu mais segurança para trabalhar com resolução de problemas?

Digo com certeza, no começo era uma forma mais tradicional de aplicar resolução de problemas

Fonte: Dados da pesquisa.

Para a Itaúba, o indicativo de efeito do uso do recurso foi de segurança por estar vinculado à organização dos dados, pois para ela os dados nas barras "facilitam a visualização do problema".

Figura 56. Resíduo de enunciação da Itaúba.



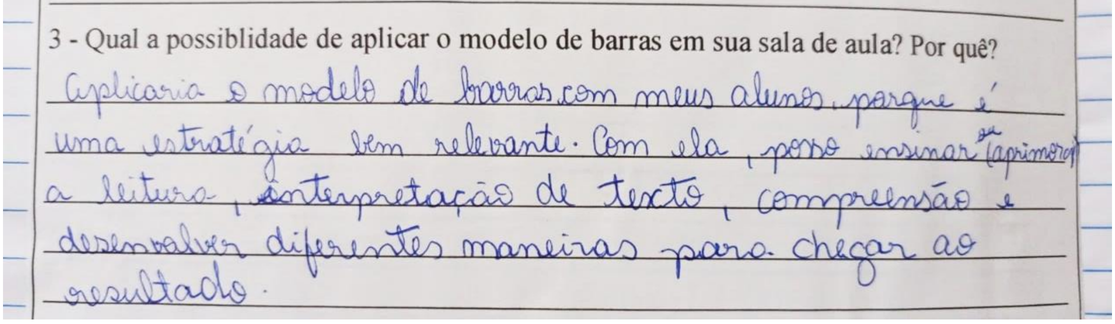
2 - Após conhecer o Modelo de Barras você sentiu mais segurança para trabalhar com resolução de problemas?

Sim, é um modelo que você se sente mais segura pois os dados são organizados e facilitam a vizualização do problema,

Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação à aplicação em sua sala de aula, Araticum afirma que "aplicaria o recurso Modelo de Barras" por ser "uma estratégia bem relevante", explicou que além de resolver problemas, o recurso ajuda a "ensinar ou (aprimorar) a leitura do problema, interpretação de texto, compreensão".

Figura 57. Resíduo de enunciação da Araticum.



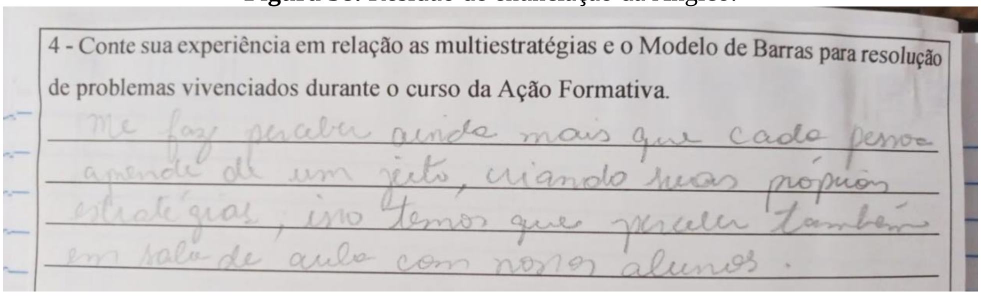
3 - Qual a possiblidade de aplicar o modelo de barras em sua sala de aula? Por quê?

Aplicaria o modelo de barras com meus alunos, porque é uma estratégia bem relevante. Com ela, posso ensinar (aprimorar) a leitura, interpretação de texto, compreensão e desenvolver diferentes maneiras para chegar ao resultado.

Fonte: Dados da pesquisa.

As sinalizações sobre a experiência em relação as multiestratégias pedagógicas disparadas por meio do recurso Modelo de Barras, os professores apresentaram que conhecer diferentes formas de ensinar seja o caminho para atingir vários interlocutores, conforme Angico "me faz perceber ainda mais que cada pessoa aprende de um jeito", indicativo de uma possível mudança em sua postura docente.

Figura 58. Resíduo de enunciação da Angico.

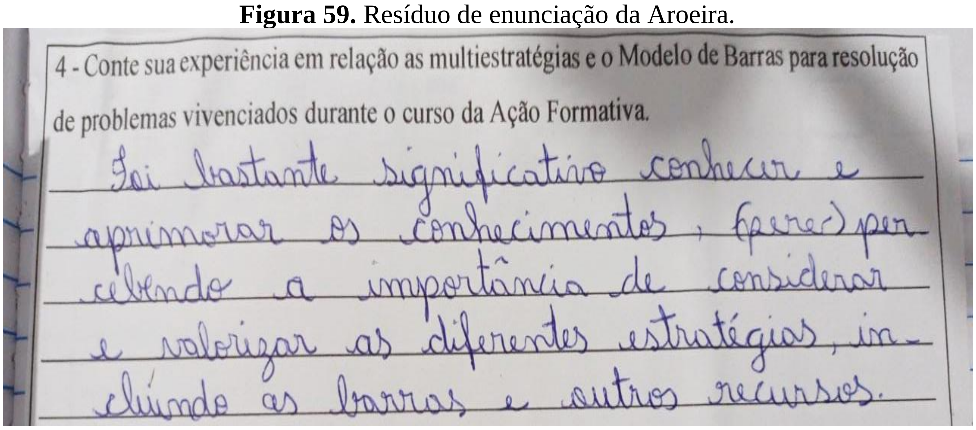

4 - Conte sua experiência em relação as multiestratégias e o Modelo de Barras para resolução de problemas vivenciados durante o curso da Ação Formativa.

Me faz perceber ainda mais que cada pessoa aprende de um jeito, criando suas próprias estratégias, isso temos que perceber também em sala de aula com nossos alunos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Para Aroeira foi "significativo conhecer e aprimorar os conhecimentos" com as multiestratégias pedagógicas, pois para ela houve produção de significados, com relação ao uso do recurso na resolução de problemas, quando utilizou "outros recursos", ou seja, materiais manipulativos, que contribuíram para sua aprendizagem.

Figura 59. Resíduo de enunciação da Aroeira.

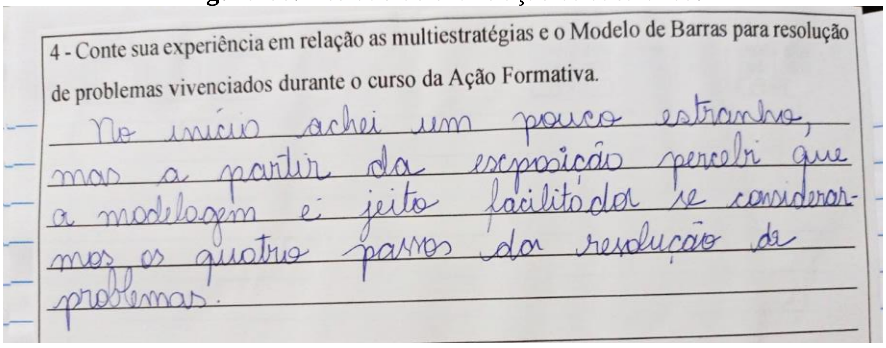

4 - Conte sua experiência em relação as multiestratégias e o Modelo de Barras para resolução de problemas vivenciados durante o curso da Ação Formativa.

Foi bastante significativo conhecer e aprimorar os conhecimentos, (perec) percebendo a importância de considerar e valorizar as diferentes estratégias, incluindo as barras e outros recursos.

Fonte: Dados da pesquisa.

Interessante o indicativo da Jacarandá, trouxe a ideia de *estranhamento* "achei um pouco estranho", contudo, percebeu um potencial do recurso Modelo de Barras associado às etapas de Polya "a modelagem é um jeito facilitador, se considerarmos os quatro passos da resolução de problemas".

Figura 60. Resíduo de enunciação da Jacarandá.



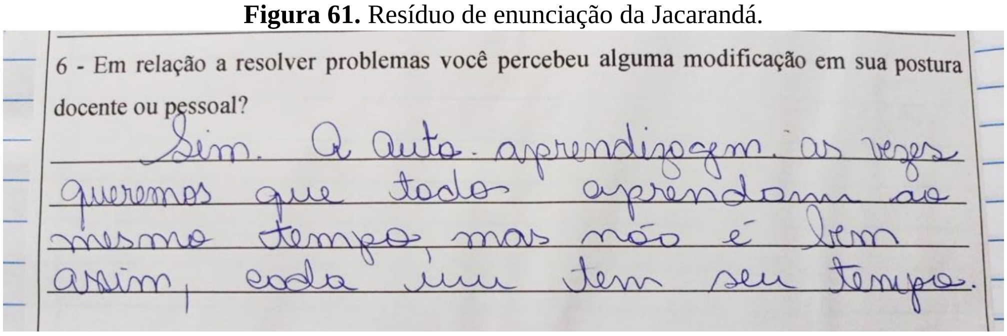
4 - Conte sua experiência em relação as multiestratégias e o Modelo de Barras para resolução de problemas vivenciados durante o curso da Ação Formativa.

No início achei um pouco estranho, mas a partir da exposição percebi que a modelagem é jeito facilitado se considerarmos os quatro passos da resolução de problemas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na questão 6, os professores sinalizaram que modificaram sua postura docente. Jacarandá trouxe "queremos que todos aprendam ao mesmo tempo, mas não é bem assim", deste modo, o indicativo de efeito do uso do recurso Modelo de Barras é a empatia, pois o resíduo de enunciação da professora se direciona aos pares, professora e alunos.

Figura 61. Resíduo de enunciação da Jacarandá.



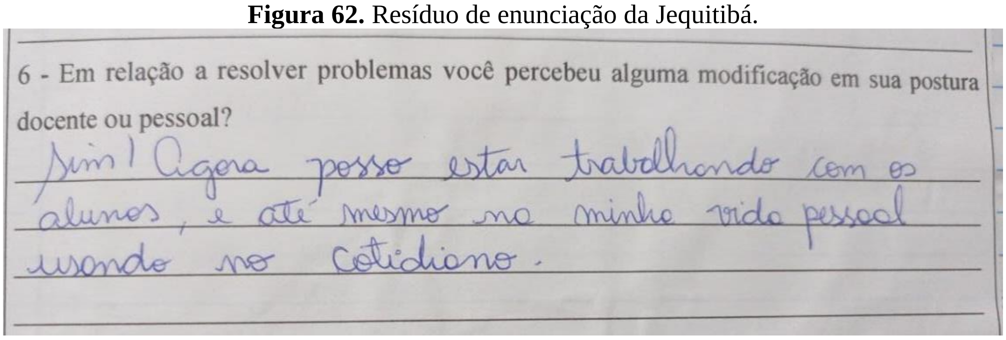
6 - Em relação a resolver problemas você percebeu alguma modificação em sua postura docente ou pessoal?

Sim. A auto-aprendizagem. às vezes queremos que todos aprendam ao mesmo tempo, mas não é bem assim, cada um tem seu tempo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Outro indicativo de modificação na postura, agora pessoal, Jequitibá esclarece que o recurso Modelo de Barras será útil "até mesmo na minha vida pessoal usando no cotidiano", esta justificação valida que o método não é apenas para a sala de aula.

Figura 62. Resíduo de enunciação da Jequitibá.



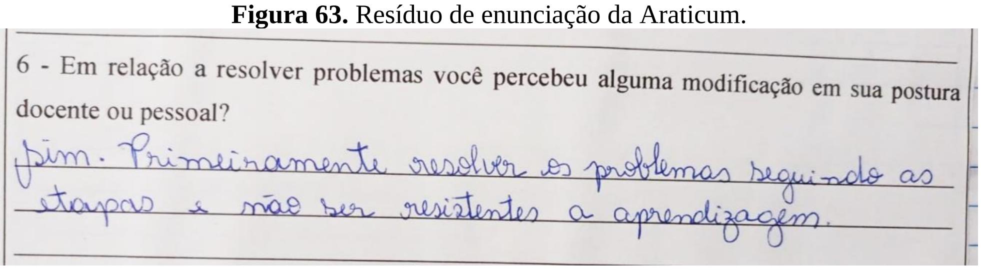
6 - Em relação a resolver problemas você percebeu alguma modificação em sua postura docente ou pessoal?

Sim! Agora posso estar trabalhando com os alunos, e até mesmo na minha vida pessoal usando no cotidiano.

Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, trouxe a sinalização da Araticum, ela apresenta que o recurso Modelo de Barras modificou sua postura como docente tanto para ensinar outras estratégias pedagógicas como resolvedora de problemas, afirma que foi persistente ao tentar resolver o problema com o recurso, assim "não ser resistente à aprendizagem" é indicativo do efeito do Modelo de Barras.

Figura 63. Resíduo de enunciação da Araticum.



Fonte: Dados da pesquisa.

Diante dos resíduos de enunciações apresentados, observei que um forte indicativo do uso do recurso Modelo de Barras está na importância de produzir significado pelo sujeito aprendente, por meio da descoberta, pela percepção de suas competências, pela regulação do pensamento, certeza de que vale a pena construir heurísticas e fazer constatações, a satisfação do sucesso, compreender que a matemática, de ser um bicho papão, é um campo de saber onde todos, estudante e, principalmente, o professor, podem navegar.

3.4 Discussão sobre os efeitos do modelo de barras, por meio do grupo de trabalho

Nesta subseção, apresento os efeitos do recurso Modelo de Barras por meio do grupo de trabalho, cumprindo com o terceiro objetivo desta investigação. O grupo de trabalho (GT) foi criado para ouvir os professores, discutir e contribuir com trocas de experiências a respeito da possibilidade do uso do recurso Modelo de Barras na sua prática docente. O diálogo possibilitou averiguar possíveis indicativos dos efeitos do recurso Modelo de Barras, no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos, tanto dos professores, quanto dos alunos.

Em virtude da pandemia da COVID-19, muitos professores não puderam participar do GT, portanto foi instituído por 2 (duas) professoras, Jenipapo e Sibipiruna, as quais no final dos encontros do GT, gentilmente, descreveram um relato das experiências com suas turmas.

Nos encontros, procurei deixar as professoras à vontade para falar/tratar sobre suas angústias, desafios e percepções com relação às suas turmas e, por isso, foi possível analisar os efeitos do uso do Modelo de Barras, na resolução de problemas.

Os encontros do GT permitiram que as professoras trouxessem dúvidas, trocas e demandas sobre como aplicar o recurso Modelo de Barras, que possibilitou discussões convenientes para a prática docente e desse modo sinalizaram alguns ajustes e contribuições, que perfizeram na validação do produto educacional.

Apresento, a seguir, algumas enunciações das professoras, que aconteceram no grupo de trabalho. Iniciamos o diálogo com a narrativa da professora Sibipiruna dizendo que tentou inserir o recurso Modelo de Barras, de forma dinâmica nas aulas de Matemática. Segundo ela, precisou iniciar a aplicação do método seguindo a ordem da abordagem CPA (concreta-pictórica-abstrata).

> **Sibipiruna:** — Minha turma é um 4º ano e devido a quarentena ficamos com alunos em aula remota, senti que eles ficaram prejudicados porque nada substitui aquela nossa reflexão ao vivo, em sala, com os alunos, conseguimos fazer um trabalho remoto, mas ele não chega tão favorecido como em sala de aula. Agora, estou trabalhando com dois grupos, grupo A e grupo B, fiz uma sondagem da turma, tenho uma ficha de monitoramento, fiz uma avalição diagnóstica com operações matemáticas, sistema numérico, cálculos, situações-problemas. Elenquei na minha ficha de monitoramento os níveis de cada aluno. Organizei o grupo A e o B, e dessa organização percebi que meu grupo A nas situações-problemas estão conseguindo interpretar melhor. Umas duas semanas atrás eu trabalhei multiplicação. Esse grupo levei no estacionamento da escola e falei um carro tem quatro rodas, mostrei o carro, tinham 10 carros estacionados, dos professores, então esses 10 carros, alguns alunos contaram pneu por pneu, uns já foram direto 4+4+4+4...+4, fui perguntando as estratégias para eles. Foi muito lindo! Comecei a envolver com situações do real, para eles entenderem a interpretar o probleminha, porque para eles entenderem ficou mais sólido, é tipo um carro tem 4 rodas e esses 10? Então, ficou concreto para eles, como se ficasse completo o entendimento, ficou visível. Foram bonitinhos, **e quando voltamos para sala percebi que estavam bem mais quietinhos, cada um fez de um jeitinho, socializaram e perguntei como fizeram e diziam eu contei assim, eu contei de 4 em 4, eu contei de 1 em 1,** por fim, falei que íamos registrar. Então, escrevi o probleminha na lousa e registrei cada estratégia”.

Neste primeiro momento quando ouvi a professora, percebi dois efeitos do recurso Modelo de Barras, com a forma do professor ensinar resolução de problemas: primeiramente, observei que estava motivada, gesticulava e se expressava sorrindo.

Assim, entendi que esse bem-estar apresentado indicava um efeito; e o segundo efeito notado na fala da professora, seria a mudança da sua forma de ensinar ao mudar sua postura e prática, uma vez que, a professora modificou sua forma de ensinar quando procurou mudar de ambiente físico (estacionamento), visto que visualizar o carro seria uma estratégia concreta, promovendo a compreensão. O carro tem 4 rodas e 10 carros, teriam então quantas rodas? Assim, os alunos poderiam elaborar suas estratégias, assimilando a quantidade de rodas para todos os carros do estacionamento.

Outro efeito percebido foi no aspecto comportamental socioafetivo da turma. Os alunos mantiveram-se mais disciplinados e interagidos, pois a professora afirma que: "*quando voltamos para sala percebi que estavam bem mais quietinhos, cada um fez de um jeitinho, socializaram e perguntei como fizeram e diziam eu contei assim, eu contei de 4 em 4, eu contei de 1 em 1*".

Adiante, a professora contou como é seu planejamento anual com relação a resolução de problemas, bem como sobre elaborar problemas matemáticos.

> **Sibipiruna:** — Pela organização do meu planejamento anual eu já previa conteúdos de cálculos, das quatro operações [...] agora introduzi problemas matemáticos, mais situações-problemas mesmo. Como participei do curso, trouxe um pouquinho dessa aprendizagem, da importância de criar problemas com a realidade deles, principalmente aplicando as 4 etapas de Polya, que eu não conhecia, ler e interpretar o problema, usar estratégias diferentes para resolver um problema. Então, nesse primeiro momento ainda não introduzi as barras, mas preferi probleminhas que eu criei para resolver em situações concretas [...]

Com relação ao uso de recursos pedagógicos, a professora diz que:

> **Sibipiruna:** — Não usei por enquanto porque ainda estou iniciando a primeira fase do concreto, fiz só um pouquinho por causa do nível deles, tem muita criança que ainda não sabe ler e escrever na minha turma.

Percebi que devido a participação da ação formativa a professora sentiu-se motivada a produzir os próprios problemas para a realidade da sua turma, podendo assim acessar cada um dos seus alunos: *"meus alunos estão no nível inicial de resolução de problemas, não estão tão aprofundados com divisão e fração como no livro, assim refleti e pensei em adaptar os probleminhas para a realidade da turma".*

Assim, ao ler o relato de experiência da professora que foi entregue no final do GT, a mesma afirma que: "*pelo fato de ter participado do curso Modelo de Barras com* *uma proposta de dar liberdade aos alunos, de usar estratégias diferenciadas para resolver problemas ampliei meu olhar e implementei na minha prática docente esse recurso, em especial a disponibilidade de usar recursos pedagógicos como o material dourado, os alunos aprendem de maneiras diferentes, nada mais justo e necessário que possibilitar e apresentar oportunidades, estratégias e recursos diferenciados para conseguir nossa missão que é ensinar a todos".*

Também conversamos sobre os problemas retirados do produto educacional, os quais foram aplicados no curso se havia possibilidade de ser desenvolvido com sua turma, a professora relata:

> **Sibipiruna:** — [...] como estava socorrendo aquela parte dos estudantes prejudicados pela Pandemia, nessas aulas remotas e, agora estamos trabalhando mais afundo com os probleminhas. Então, os problemas do produto educacional para minha turma são difíceis, mas tem situações que, adaptando, é possível para trabalhar sim, precisa só iniciar com o material concreto, como o material dourado ou o ábaco. Pelo que estudamos no curso é preciso fazer uma reflexão e eles fazerem do jeitinho deles [...]

Além disso, notei neste diálogo que a professora apresenta outro efeito que seria ampliação do seu repertório docente, que aperfeiçoou no curso sobre o recurso Modelo de Barras, diz o seguinte:

> **Sibipiruna:** — [...] não consegui aplicar ainda os problemas do curso, mas eles serviram para que eu pudesse adaptar problemas do livro didático para a realidade da minha turma, norteou as ideias, eu nem olhei o livro didático, apenas fiz um trabalho de repertório**.**

A professora explicita que "apenas fez um trabalho de repertório", compreendo que, para ela repertório seria seu acervo de multiestratégias pedagógicas para ensinar a resolver problemas.

Durante a conversa sobre os problemas do livro didático, a professora Jenipapo relatou que o recurso Modelo de Barras seria um aliado para recuperar o aprendizado dos alunos, não foram bem em uma avaliação externa que ocorrera na escola.

> **Jenipapo:** — Estive olhando o livro didático que estou com o 5º ano e tem algumas situações que dá para gente pegar e adaptar com esse Modelo de Barras,

> só não apliquei ainda, mas depois do resultado da prova Quality [5]que o 5º ano faz e não foi bom, acredito que para recuperar o desempenho deles as barras vão ajudar muito [...].

As duas professoras relataram que, devido às demandas escolares e divisão de turmas, por conta da Pandemia, ainda não puderam introduzir o recurso Modelo de Barras, mas que iniciaram a primeira fase da abordagem CPA, uso do material concreto.

Além disso, as professoras apresentam em suas falas que o recurso Modelo de Barras permite ampliar o leque de possibilidades e adaptações, com relação ao livro didático, uma vez que o livro é abstrato, pouco lúdico. Contudo, as resoluções por meio do recurso são atrativas, sendo que os estudantes necessitam ainda de estratégias pedagógicas facilitadoras e visuais.

> **Jenipapo:** — Depois do curso percebi o leque de situações que posso trabalhar com meus alunos em sala. Sei que é complexo, principalmente para nós que chegamos aqui nu e cru, mas com essa visão que aprendemos aqui tem situações do livro didático do 5º ano dá para fazer adaptação [...].
>
> **Sibipiruna:** — E esse Modelo de Barras, particularmente, eu gosto mais porque eu gosto de desenhar, fica mais representativo para mim do que o número, então esse Modelo de Barras as crianças vão conseguir facilmente.

No diálogo, as professoras justificam que ainda não conseguem avançar com a aplicação dos problemas do curso, devido suas turmas estarem com aprendizado de anos anteriores, isto é, como não tiveram aulas presenciais ainda é preciso retomar com conteúdo do ano anterior.

> **Sibipiruna:** — [...] minha turma de 4º ano ainda está aprendendo conteúdo do 3º ano, então como não tiveram aulas presenciais ano passado e os pais não sabem fazer essa reflexão, que só a gente sabe, dificultou ainda mais o aprendizado deles.

---

[5] Na área educacional, este modelo é utilizado nas avaliações produzidas pelo Latin American Laboratory for Assessment of the Quality of Education (LLECE) e no Program for International Student Assessment (Pisa), sob os patrocínios da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco) e da Organization for Economic Co-operation and Development (OECD), respectivamente, e das quais o Brasil tem participado escola é a aprendizagem dos alunos. Sendo assim, o foco está no desempenho que os alunos alcançam nos testes cognitivos aplicados em áreas de conhecimento específicas e no ambiente em que esse desempenho é gerado. Para conhecer esse ambiente, normalmente utilizam-se questionários aplicados aos alunos, aos professores das disciplinas testadas e aos diretores escolares. Essa metodologia tem permitido produzir diversos indicadores que, a exemplo do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb), no Brasil, vem aumentando o debate sobre o processo educacional. No entanto, essa metodologia não apreende os demais aspectos envolvidos na educação escolar.

> **Jenipapo:** — [...] meu 5º ano está em nível de 3º ano porque como o 4º foi online, não aprenderam [...].

No decorrer dos encontros do grupo de trabalho, as professoras sinalizaram que modificaram sua prática docente. As aulas estão diversificadas e buscaram aprofundar o desenvolvimento das capacidades e competências, sentindo que aperfeiçoaram seu modo de ensinar, em vários aspectos, como exemplos: acessar o aluno, respeitar o modo do aluno de resolver os problemas por meio de um novo olhar, olhar voltado individualmente a cada aluno.

> **Jenipapo:** — Eu olhava a sala como um todo, depois do curso comecei a olhar os alunos de forma individual, principalmente para aquele que não aprende tanto. Então, agora eu vou refletindo da seguinte forma como que eu vou elaborar, como que eu vou pensar nesse aluno no momento que eu vou planejar aquela aula, meu olhar diferenciado para que eu possa trazer aquela criança para chegar mais próximo do aprendizado.
>
> **Sibipiruna:** — A sala tem diferentes saberes, lá no momento que a gente estava na reflexão na sala do dia que fomos no estacionamento, algumas crianças apresentaram um raciocínio mais rápido, outras mais lento e ainda tinha aqueles que se não tivesse o concreto não teriam entendido [...] eles só não estão mais avançados porque não estavam em sala, eu sei que é falta de intervenção pedagógica.

No segundo aspecto observado, as professoras sentiram-se capazes de trabalhar com as estratégias aprendidas no curso, por seguirem as etapas de resolução de problemas.

> **Sibipiruna:** — Agora estou no momento exato de estar discutindo isso. Agora, vou aplicar teoria e prática, introduzir resolução de problemas com mais profundidade [...] sobre as etapas, eu resumi com eles (se direcionando aos alunos) que iríamos fazer pelo menos três coisas importantes. Primeiro vamos ler e interpretar o probleminha, usando uma linguagem mais própria para eles, parece uma história, vamos imaginar que história o problema está nos trazendo, aconteceu uma situação, precisamos entender. Então, estou trabalhando nesse sentido. A segunda coisa, vamos pensar, trabalhei do meu jeito, as etapas numa linguagem mais própria para eles mesmo, então, vamos pensar como a gente pode resolver esse problema, qual situação? De mais? De menos? Vamos multiplicar? Como que a gente vai representar esse cálculo ou como a gente vai calcular essa situação? Agora vocês pensam. Porque tem situações problemas que dá para fazer várias estratégias. Trabalhei com eles que tem gente que vai fazer com risquinhos, tem gente que vai fazer com bolinhas, tem gente que vai fazer com o material dourado, mas que o importante é saber fazer. E, depois, vamos responder o problema. Sintetizo para eles, então, procuramos entender a história, pensar como que a gente vai calcular e vamos responder. Aí eu sintetizei nesses três aspectos

> para ficar mais gostosinho para eles. Anotei para eles, 1, 2, 3 para eles não esquecerem.
>
> **Jenipapo:** — Também já fiz assim, não do jeito que ela nos ensinou, porque somos adultos, mas para eles que são crianças usei as etapas de um jeito que eles iam entender.

Perguntei ao GT, se havia modificado sua forma de trabalhar com outras estratégias pedagógicas na resolução de problemas em sala de aula e que consideravam mais relevantes. Diante da questão norteadora, percebo outro efeito do recurso Modelo de Barras na fala da professora Sibipiruna que está relacionada ao desenvolvimento profissional consolidado de uma atitude reflexiva.

> **Sibipiruna:** — [...] antes entregava o problema e fazia com eles do meu jeito. Agora, não consegui. Deixei os alunos tentarem fazer do jeitinho deles primeiro. Um todo assim, as crianças fizeram pelos passos certinhos que eu organizei com eles, e teve criança que estava ajudando o coleguinha dizendo "olha, você não colocou a resposta!" Estamos em processo de aprendizagem. Eu os achei muito mais participativos, interagindo mais sabe, com vontade de fazer, o que antes não era assim, estão tranquilos, prestando mais atenção, um privilégio, um sonho! [...] achei que foi bom porque teve resultado, estavam fazendo os registros, as operações certinhas, conseguiam identificar se era mais ou menos, entende?! [...].

Em resumo, os encontros do GT proporcionaram averiguar junto às professoras os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras, que contribuiu de modo significativo para a aprendizagem dos alunos, bem como, o interesse e vontade de aprender matemática, alegaram que os alunos interagem mais nas aulas, respeitam os colegas e realizam as atividades. De acordo com o relato de experiência da professora Sibipiruna: *"percebi que os alunos se sentiram motivados com a proposta, acompanhando o raciocínio proposto e ampliando o conhecimento e habilidade da resolução de problema com Modelo de Barras. [...] percebi que não somente eles gostaram, mas também surtiu efeito significativo na aprendizagem deles".*

Assim, as professoras explicitaram que essa atividade de ir para a sala depois do curso modificou sua forma de trabalhar com resolução de problemas, onde o professor torna-se investigador da sua prática profissional.

Além disso, as professoras apresentaram que o recurso Modelo de Barras é um caminho que pode ser percorrido tranquilamente, comparando-o a um GPS, alegando uma de suas potencialidades que além de visualizar, o método guia o processo de ensinar e de aprender outras técnicas de resolução e conceitos, sendo considerado como um forte desenvolvedor de habilidades.

> **Jenipapo:** — [...] é como se fosse um GPS, sabe? Ele ajuda a guiar para outras formas de resolver, a gente pode ensinar outros conteúdos ao mesmo tempo [...].

Também relataram que o recurso Modelo de Barras deveria ser trabalhado com uma quantidade inferior, do que estão acostumados no dia a dia. Devido à pandemia perceberam que trabalhar com metade dos alunos é possível ensinar com qualidade, podendo socializar as estratégias e atender aquele aluno que ainda não compreenderam.

> **Sibipiruna:** — [...] em uma sala de 30 alunos é mais difícil de trabalhar, não é impossível, sabe? Mas, trabalhar com 10 até 15 alunos, nossa, é ótimo! Digo isso porque estamos em grupos lá na escola como já falei, e igual a situação do estacionamento, a gente teve a oportunidade de socializar todas as estratégias de cada um. Consegui dar atenção individualizada para quem ainda não tinha entendido, igual você fez no curso com a gente, me senti privilegiada, sabe, fez toda a diferença para mim, não tive medo de aprender Matemática [...].

Percebi na fala da professora a preocupação com relação ao aprendizado dos alunos, evidenciando que uma quantidade menor em sala seria melhor de acessar a cada um, é possível identificar efeitos na prática docente desta professora como ser mais paciente, praticar a empatia com seus alunos e atribuir como hábito as etapas de resolução de problemas.

Durante as trocas de experiências, as professoras me perguntaram se havia a possibilidade para os próximos encontros serem nas salas de aulas, em que atuam.

> **Jenipapo:** — [...] olha, seria muito bom para mim se você pudesse ir à minha turma, gostaria que você observasse como estou usando o Modelo de Barras e como posso melhorar as estratégias que eu aprendi no curso [...].
>
> **Sibipiruna:** — [...] também quero, na verdade quero muito! Você estando lá, vai me ajudar muito, principalmente porque vou me sentir mais segura para ensinar os tipos de probleminhas, porque eu já entendi a parte concreta, a pictórica, desenhar as barrinhas, e fazer os cálculos que seria a abstrata [...] o curso ajudou muito, instigou a pensar mais, se eu tivesse feito isso ano passado, hoje meus alunos com certeza podiam estar resolvendo os problemas do seu livro, mas como o tempo do curso foi curto, então você indo lá vai me ajudar a olhar para cada aluno da minha turma e como introduzir melhor o Modelo de Barras, qual estratégia uso com eles, posso ir adaptando os problemas do seu livro, sabe!”

Assim, ficou acordado entre nós que nos próximos encontros, estaria participando das aulas de Matemática, em suas salas a fim de contribuir com o ensino e com a aplicação do recurso Modelo de Barras, procuramos adaptar os problemas do curso para a possibilidade de resoluções por parte dos alunos.

Perguntei ao GT se modificou a sua forma de trabalhar em sala, se o curso havia proporcionado mudança na sua prática docente, segue enunciações das professoras:

> **Jenipapo:** — [...] percebo que nós somos engessadas pela hierarquia da escola, temos que dar conta do conteúdo, das tarefas, das provas externas, sabe como é né, você também é professora. Esses dias, isso foi depois do curso, eu tomei uma atitude de chegar na coordenação e falar que eu ia trabalhar do meu jeito porque não adianta estarmos correndo contra o tempo e não dar conta de ensinar esses alunos [...] ou eu trabalho qualidade ou eu não vou trabalhar quantidade para prefeitura porque vai ser um salto de aprendizagem, essas crianças vão deixar de aprender bem [...] então, vou trabalhar do jeitinho dos meus alunos, conheço a minha turma, cada dificuldade deles [...] tive segurança de falar isso, foi um desabafo! Se estou buscando qualidade para que eu possa aplicar, então, tenho que trabalhar com eles conforme estou vendo a necessidade de cada um e achar o meu jeitinho de lidar com eles e aplicar, e não receber engessado, tudo pronto, tem que ser assim porque nós queremos ter nota, nós queremos ter dados sem as crianças ter aprendido nada [...] **os alunos pouco aprenderam ano passado, venho num curso que me ajuda melhorar como professora, ensina outras estratégias para ensinar matemática, a trabalhar pensando em cada aluno, naquele momento só pensei neles porque eu vivi a experiência com as barras e sabia que seria um meio que os alunos iam aprender melhor** [...].

Observei na enunciação grifada, um resíduo da ação formativa, o curso, em que a professora alega aperfeiçoamento da sua prática pedagógica e do repertório docente, alegando ter conhecido e aprendido outras estratégias pedagógicas, assim podendo considerar como efeitos do uso do recurso Modelo de barras no modo do professor ensinar a resolver problemas matemáticos.

Seguindo o calor dessa discussão, perguntou-se a Jenipapo como o curso tem trabalhado com resolução de problemas em sua sala:

> **Jenipapo:** — Bem, agora sigo os passos. Percebi que meus alunos quando erram, voltam a fazer sem ficarem angustiados, antes ficavam bravos, uns até choravam, sabe! Eles não desistem fácil. É claro que ainda ocorrem os erros, mas é como eu digo a eles: é errando que se aprende [...].

Nesta fala, compreendi que os alunos da professora estão persistentes e conseguindo se autoavaliar, isto é, conscientizando de que aprender é um trabalho árduo, contudo monitorar os pensamentos se torna hábito em um processo de aprendizagem em que, a autorregulagem da aprendizagem acontece gradativamente.

Destaco também nessa enunciação um viés ao erro, pois a professora trata-o como um processo natural de aprendizagem, em que o conhecimento é construído nas tentativas, assim considera o erro como um processo para ensinar.

Ainda sobre a fala da professora, faz oportuno dizer que o conhecimento do professor ao ensinar não se dá necessariamente por meio da correção que o aluno lhe faça de erros produzidos. Isso quer dizer que à medida que se vai pensando também é preciso repensar o pensado, fazendo com que o aluno consiga rever suas construções, além de envolvê-lo de curiosidade e de diferentes estratégias.

Deste modo, percebi que a professora Jenipapo demostra-se mais segura no GT, quando comparada ao curso, visto que suas expressões apresentam motivação e entusiasmo, seu modo de falar é animado.

Outro ponto que merece destaque é sobre a sensibilização da professora sobre a necessidade do movimento da troca do professor em atuar sempre na mesma turma e ano escolar, isso pode ser notado na seguinte enunciação:

> **Jenipapo:** — **S**empre trabalhei desde a creche ao Ensino Médio, essa mudança faz bem para nós professores porque nós aprendemos mais, não fica estagnado, e isso causa estresse e cansaço.

Assim, a professora demostra estar convicta de que o professor, especialmente pedagogo, deve monitorar sua prática docente na sala de aula, bem como estar sujeito à mudança comportamental, analisando que nem sempre a comodidade de estar com a mesma turma ou ano escolar, trará benefícios a ele e aos alunos.

Adiante, perguntei às professoras se o material concreto e os recursos pedagógicos utilizados no curso tiveram algum impacto para suas aulas.

> **Jenipapo:** — Sim, levei o material dourado e o ábaco [...] expliquei com esses materiais, depois os alunos diziam: "professora que legal, agora eu entendi" então eu percebi que usar essas estratégias ajudam muito.
>
> **Sibipiruna:** — Preferi desenhar as barrinhas no quadro e colorir com os pincéis, sabe!

Por meio dessas falas, percebi o interesse dos alunos como efeito do uso do Modelo de Barras, em que eles resolvem o problema apreciando suas construções de outros modos, como o uso dos materiais manipulativos e recursos pedagógicos.

No relato de experiência da professora Sibipiruna afirma que: *"passei a dar mais importância ao uso de materiais concretos e material dourado, visto que favorece uma melhor compreensão da aritmética, operações, trocas e agrupamentos matemáticos"*.

Além disso, a professora explicita que percebeu a importância de usar o material dourado por contribuir na autonomia do aluno em resolver o problema: *"percebi que o material dourado é um ótimo recurso concreto e manipulativo para compreensão do sistema de numeração decimal e com ele os estudantes podem fazer as quatro operações, bem como, resolver problemas matemáticos de forma autônoma"*.

Além disso, no relato de experiência da professora Sibipiruna nos conta que: *"no início ao resolverem problemas, todos optaram pelo uso de material concreto, à medida que iam aprimorando a estratégia optaram para o uso do material dourado e logo para o uso do Modelo de Barras". [...] acabou que todos optaram pela resolução dos problemas usando o registro gráfico com as barras porque achavam mais fácil para fazer a representação dos dados e encontrar a resposta da pergunta do problema, porque para resolver os cálculos com números mais altos através de desenhos dava muito trabalho e com risquinhos, demorava mais e era mais cansativo.*

Segundo o relato da professora, seus alunos relataram a ela os motivos de resolver problemas por meio do uso do recurso Modelo de Barras: *"porque o Modelo de Barras facilita a resolução e a forma de entender o que está perguntando"*.

Em seu relato de experiência a professora diz que: *"meus alunos se identificaram com a estratégia das barras e, ao resolver qualquer probleminha, a primeira estratégia escolhida é o Modelo de Barras".* Também, apresenta no relato que um de seus alunos disse: "e*u prefiro fazer com o desenho das barras porque é bem fácil".*

Ainda sobre o relato da professora Sibipiruna, com o recurso Modelo de Barras na resolução de problemas a partir das etapas de Polya qualifica a prática docente e favorece a aprendizagem dos alunos: *"possibilita ao estudante a oportunidade de pensar, elaborar e usar estratégias diferenciadas sem ficar preso a apenas aquele modelo mecânico de resolução de problema com algoritmo, com as barras eles podem representar dados e resolver operações e chegar a um resultado de forma mais próxima de seu raciocínio matemático atual e ir chegando em um raciocínio mais elevado".*

3.4.1. Validação do produto educacional pelo grupo de trabalho

Agora, faz oportuno apresentar a participação das professoras com relação a estrutura do livro onde disseram que gostariam de aplicar os problemas do livro, em suas salas, mas que era preciso um prazo maior para apresentar aos alunos, os tipos de problemas.

Assim, juntamente com as professoras, buscamos olhar para a estrutura do produto educacional e a distribuição dos problemas, a fim de verificar quais eram possíveis de aplicar e se precisariam fazer adaptações para suas turmas.

Diante disso, as professoras perceberam que os problemas abrangiam vários objetos matemáticos e estratégias pedagógicas, dizendo que seria interessante para nós professores um seguimento desses problemas, à medida que aumentava-se o nível de dificuldade das resoluções, logo construiriam conhecimento pelos objetos matemáticos e estratégias pedagógicas de forma linear.

Com ajuda e contribuição das professoras, modifiquei a estrutura de cada bloco do produto educacional, sendo alterada a ordem dos problemas dentro do bloco. Durante a análise dos problemas e sugestões de melhoria, as professoras enunciaram:

> **Jenipapo:** — Hoje vejo esse Modelo de Barras nos trazendo assim, mais clareza, do que às vezes quando nós pegamos o livro didático vejo muitos questionamentos nas salas dos professores "porque as crianças não vão compreender isso aqui" com essa nova visão, pensei eles não compreendem simplesmente porque não estamos sabendo trabalhar essas habilidades, como ficou entendido no curso do Modelo de Barras.
>
> **Sibipiruna:** — Realmente, o Modelo de Barras nos permite enxergar outras possibilidades de estratégias pedagógicas para ensinar as crianças!

Ao fim dos encontros do grupo de trabalho, recebi um arquivo que se trata de um relato de experiência da professora Sibipiruna sobre como foi participar do GT e da aplicação do uso do recurso Modelo de Barras com sua turma.

Por fim, faço aqui o convite de conferir o anexo, em especial, do produto educacional que foi revisado, após as contribuições do GT.

SEÇÃO IV

4 ANÁLISES A POSTERIORI E A VALIDAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Esta seção tem por objetivo apresentar as análises a *posteriori* e a validação do produto educacional, bem como os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas.

4.1 Aplicação do problema inicial - Aquário

O problema inicial, foi entregue aos sujeitos das pesquisas em folha sulfite, impressa e avulsa, para que todos resolvessem no prazo de 20 minutos, a qual foi recolhida sem correção, cujo propósito é a comparação com o problema final, porém não avisamos aos sujeitos sobre essa parte.

Faz oportuno dizer que além do lápis e da borracha, havia no ambiente da sala do Auditório recursos pedagógicos, como Material Dourado, Ábaco, Frac soma, Régua de Frações e Régua de Cuisenaire, lápis de cor, régua, compasso e folha sulfite, com o intuito de atender os participantes, se caso precisassem de algum material para elaboração seu plano de resolução.

A seguir, apresento uma síntese da aplicação do problema inicial que traz enunciações dos professores. Com as folhas do problema inicial em mãos, a pesquisadora fala aos sujeitos de pesquisa:

> **Pesquisadora:** — Pessoal, nós vamos (equipe da pesquisa) entregar o problema inicial! Vocês vão produzir a solução de vocês, se possível, sem consulta e comentário com o colega, apenas faça a sua solução, do seu jeito, do seu modo ou da forma que puder apresentar, sendo que não faremos a correção dele hoje".

Diante da fala da pesquisadora um sujeito exclama:

Angico: — Professora, só lembrando que estamos aqui como alunos, e alunos gostam de conversar.

Muitos risos.

Entreguei e apresentei o seguinte problema:

Em um grande aquário um quarto dos peixes são dourados. Há 4 pintados a mais do que dourados no aquário. Os 16 peixes restantes são tucunarés. Quantos peixes existem no aquário?

Após a entrega do problema, comuniquei o início da resolução do problema, seguidamente, surgindo a primeira fala de um dos sujeitos:

Sibipiruna: — A estratégia que a gente quiser?

Os professores participantes, organizados individualmente, analisaram o problema e, como de costume, os murmurinhos foram acontecendo durante as leituras silenciosas. A partir destes, foi possível analisar inicialmente as enunciações dos sujeitos de pesquisa, produzidas na primeira aplicação do problema. Abaixo apresentamos algumas enunciações:

Aroeira: — Para que tanto peixe!? (Risos)

Angico: — Eu só quero contar os peixes que tem no rio!

Jequitibá: — Meu pai!

Palmeira: — Logo fração, minha inimiga. Terror fração, não sei fazer fração!

Araticum: — Tenho vergonha, mas não vou conseguir fazer isso não.

Itaúba: — Também não!

Baru: — Obrigada Araticum, você me tirou um alívio!

Angico: — Posso ir embora!?

Tarumã: — Me dá carona!?

Araticum: — Matemática não é comigo!

Acácia: — Poderia ter colocado uma situação-problema mais fácil hein!

Aroeira: — Meu Senhor, para que essa quantidade de peixes!?

Tarumã: — São três tipos de peixes, como que você vai pensar!? Quer dizer que não tem como [...].

Aroeira: — O importante é que eu respondi!

Passando os vinte minutos da realização do problema, perguntei aos sujeitos de pesquisa se haviam concluído, pois era o momento de recolha deste. Logo, os primeiros comentários surgiram:

Jacarandá: — Eu nem comecei!

Jatobá: — Eu também!

Palmeira: — Eu não consegui!

Sibipiruna: — Não sei nem por onde começar!

Angico: — Bom, acho que cheguei numa resposta, se está certo não sei!

Mogno: — Não quero tentar mais!

Acácia: — Ainda bem que a pesquisa era para mostrar que antes do curso eu não sabia fazer isso!

Jenipapo: — Não estou conseguindo fazer, vou passar!

Tarumã: — Não achei não!

Palmeira: — Pode recolher. Pode olhar porque eu quero aprender e eu não sei!

Aroeira: — Se a Acácia tem facilidade com Matemática e está demorando imagina eu que sou pedagoga!

Jenipapo: — Palmeira, porque tem fração nele, você já montou um bloqueio para ele (problema).

Angico: — Eu fui desenhando, desenhando, mas não consegui!

Acácia: — Matematicamente não deu certo, então eu resolvi no chute!

Angico: — Vou falar que um peixe morreu!

Baru: — Eu sou professora de Português, não sei Matemática!

Angico: — Eu acho que achei, mas acho que está errado. [...] Chega, não quero mais!

Após a recolha de todos os problemas, resolvidos ou não, apresentando estratégias de resolução ou não, era perceptível angústia nos semblantes dos sujeitos de pesquisa, demonstravam ansiedade, chateações por não terem uma estratégia para seguir, ao menos chegar próximo ao resultado suposto. Contudo, animados para saberem logo a resposta do problema.

Observando os professores, percebi que cada um tem seu modo de ser, de agir, pensar, fazer; enfim, cada professor é uma personalidade distinta. Enfim, passei para o próximo momento em que foi apresentada aos participantes uma breve história sobre o Modelo de Barras e o porquê acreditamos ser um disparador de multiestratégias para resolução de problemas. Saliento que o objetivo do curso é ensinar os professores a resolver problemas e, para isso, apresentamos a importância de seguir as quatro etapas de Polya.

4.2 Aplicação do problema final - Aquário

Retomarmos o problema Aquário com os participantes. A intenção é de verificar os possíveis efeitos do uso do recurso Modelo de Barras na resolução deste problema por meio dos resíduos de enunciações. Antes da entrega da folha de aplicação do problema final, a pesquisadora exclama:

Pesquisadora: — Esse problema aqui causou um problema em vocês!

Sibipiruna: — É o peixinho?

Araticum: — Ah, não!

Angico: — E agora será que eu vou lembrar o que eu fiz com os peixes? Será que vou lembrar? Me dá lá de volta professora o meu!

Palmeira: —É o peixe!

Jatobá: — De novo esses peixes!?

Jenipapo: — Esses peixes já deram o que falar.

Angico: — Vou usar a nova estratégia! Eu podia ter tirado uma foto do que fiz.

Sibipiruna: — Esse peixe é o que parte-todo, comparação ou antes-depois?

Pesquisadora: — Quero ouvir de vocês qual é o tipo de problema tratado aqui.

A partir das enunciações a seguir, percebi a ansiedade para iniciarem a resolução do problema novamente, na tentativa de resolverem com o recurso Modelo de Barras:

Angico: — Já posso começar? Vou usar a barra para ver!

Sibipiruna: — É para responder nessa folha?

Angico: — Pode fazer já? Eu não lembro o que fiz.

Jenipapo: — Vou olhar meu caderninho de anotações que fiz minhas barras!

Palmeira: — Não respondi o primeiro, mas vou tentar as barras também!

Tarumã: — Quero a régua para desenhar as barrinhas!

Mogno: — Posso distribuir nas barras o meu?

Durante a realização do problema, os sujeitos de pesquisa enunciam trocas de informações que se percebem construídas no curso, tanto as quatro etapas de Polya quanto o recurso Modelo de Barras, sendo uma aprendizagem vinculada. Isso fica claro nas enunciações a seguir.

Sibipiruna: — Começa nos sujeitos, Aquário.

Aroeira: — A primeira etapa!

Sibipiruna: — Vamos começar do começo! Ler primeiro. Vamos ler pelo menos umas três vezes.

Aroeira: — Estou conseguindo acompanhar seu raciocínio.

Jenipapo: — Vou desenhar os sujeitos nas barrinhas. Tem régua? Ah! Também dá para usar o dedinho.

Palmeira: — Aqui tem três informações: uma tem um quarto de peixes que são dourados, uma tem 4 a mais que dourados e uma é dezesseis o restante [...].

Aroeira: — Então, coloca nesse pedacinho porque vai dar 4 esse 4 a mais.

Araticum: — [...] mas pega dois quartos? Porque dourados está aqui olha só, olha como desenhei a minha barrinha!

Sibipiruna: — [...] o certo é nesse quadradinho pegar um pedacinho porque é só 4 a mais que dourados.

Palmeira: — E o 16 fica no final [...].

Jequitibá: — Tem que fazer as barrinhas [...]

Tarumã: — É! Tem que fazer 4 quadradinhos e pintar um, pois, um quarto que é pintado.

Jequitibá: — Entendi!

Tarumã: — Agora, pegamos mais um quadradinho e um pedacinho do outro, o terceiro para os pintados [...].

Ao andar pelas mesas para observar a resolução do problema, percebi que os sujeitos de pesquisa estavam tentando resolvê-lo pelo recurso Modelo de Barras. Para modelar este problema, exigia-se dos sujeitos de pesquisa raciocínio e persistência, sendo necessário reler o problema várias vezes, sendo os que seguiam as etapas, tiveram menos dificuldade para visualizar os dados do problema nas barras. Contudo, os professores que não fizeram anotações conforme a primeira etapa não compreendiam a modelagem, estavam confusos.

Mogno: — Não sei colocar os dados direitinho nas barrinhas, olha como estou fazendo [...].

Jatobá — Desenhei a barra, distribuí esses peixes, mas não sei onde estou errando [...].

A fim de contribuir com a construção do raciocínio dos professores propus que fizéssemos a leitura do problema, assim identificamos as informações por meio das etapas de resolução de problemas, modelamos a barra para visualização explícita dessas informações. Diante disso, os professores compreendiam a atividade e estávamos na mesma direção, assim as ideias dispersas se encaixavam.

Mogno: — Nossa! Estava comparando os sujeitos, sendo que dava para fazer uma barra só! Olhando agora a barrinha pronta nem acredito que era tão fácil, estou envergonhada [...].

Jatobá: — Não tinha me dado conta que o meio era 20. Essa barra é maravilhosa, ficou claro para mim!

Ao fazer a leitura plausível da enunciação da Mogno "Nossa! Eu estava comparando os sujeitos, sendo que dava para fazer uma barra só!" Percebi que ela estava produzindo significado em outra direção, pois ainda não havia compreendido que poderia ter modelado os dados em uma barra, mas que ao visualizar a barra fez por entender por meio da sua persistência, a qual acredito ser um efeito do uso do recurso Modelo de Barras.

Por um lado, houve professores que ao tentarem resolver com o recurso Modelo de Barras desistiram, perante a dificuldade de compreender o problema preferiram descontinuar ou tomar por legítimo o que o outro fez.

Itaúba: — Não sei fazer mais, já apaguei sei lá quantas vezes. Vou fazer igual o raciocínio do Angico.

Por outro, houve professores que insistiam em olhar a resolução do problema inicial, sendo que já iniciaram o problema final na tentativa de resolvê-lo com as barras. Assim, percebi que a ansiedade de acertar o problema era maior do que a de persistir naquela estratégia de modelagem. À medida que o desafio de raciocinar aumentava, os professores afrouxavam na modelagem, buscando na estratégia de resolução de suposição, o rumo ao acerto.

Angico: — Pensa numa bagunça! Não lembra mais como fiz.

Nesse momento o orientador interveio dizendo ao sujeito de pesquisa:

Orientador: — Não tenta lembrar o que você fez, tenta fazer hoje, vive hoje, aquele dia você era outra pessoa e, agora, a pessoa de hoje faz como? Esquece o passado e vive o presente.

Em seguida, o sujeito de pesquisa Araticum diz ao Angico:

Araticum: — Você está pensando separado.

Angico: — É! O trabalhão que eu tive aquele dia! Lembro que era 40. Vou ler de novo e anotar.

Essa enunciação mostra um possível efeito do uso do recurso Modelo de Barras, não se dar por vencido, mas persistir.

Passados alguns minutos, surge uma nova discussão:

Angico: — Olha aí professor, fiz!

Orientador: — Vamos juntar as barras?

Angico: — Fazer uma barrinha só?

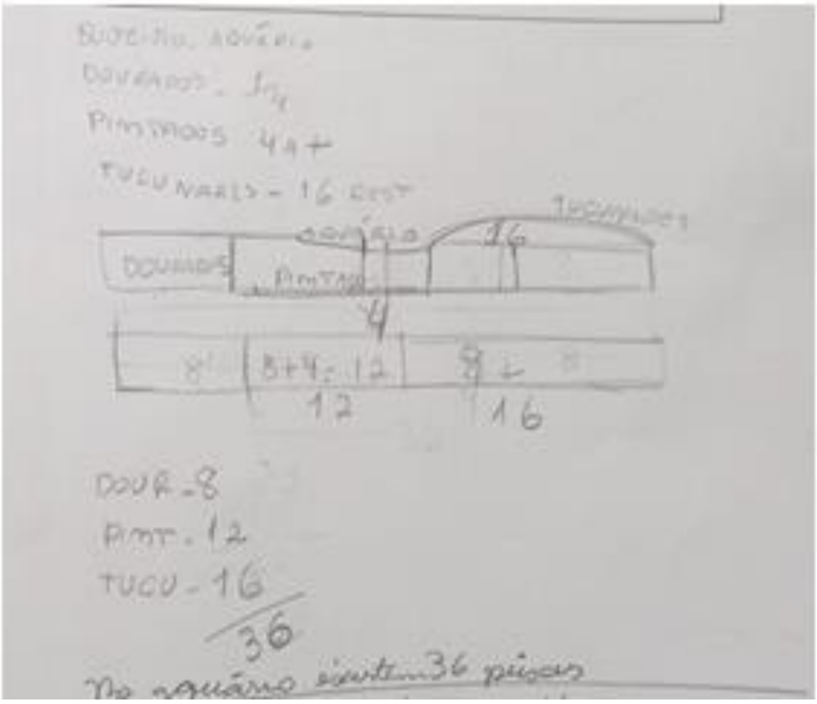
Orientador: — Isso. Faça uma barra representando o Aquário e depois divide em 4 partes iguais, distribui os dados nela [...].

Sibipiruna: — Descobri! Professor acho que descobri. Só falta fazer o cálculo (entusiasmada).

Orientador: — Isso aí!

Sibipiruna: — Sério! Consegui (empolgada e feliz)”.

Figura 64. Resíduo da estratégia por meio das barras do sujeito de pesquisa Sibipiruna do problema Aquário.

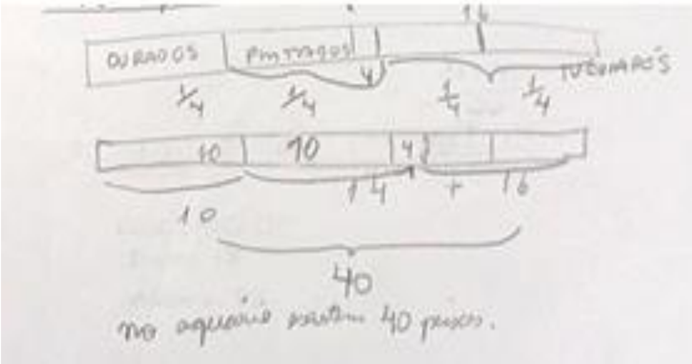


Fonte: Dados da pesquisa.

Pesquisadora: — Você distribuiu corretamente o tamanho das barrinhas, mas esse dado aqui precisa rever, pois, veja que o 4 é menor e aqui está maior [...].

Sibipiruna: — Realmente! Então, não é 8 é 10 porque aqui deu 20, mas a outra metade do aquário ficou só o 16, se aqui é 20, então aqui também ter que ser 20.

Figura 65. Resíduo da estratégia por meio das barras auxiliada pelo sujeito de pesquisa Sibipiruna do problema Aquário.



Fonte: Dados da pesquisa.

Aroeira: — Como você achou esse 10?

Sibipiruna: — Pela barra fica visível deixa te mostrar [...].

Angico: — Professor! Aqui é a metade? No 16?

Orientador: — Veja só, o 16 é até aqui, mas tem esse outro pedaço que faz parte da metade do aquário [...].

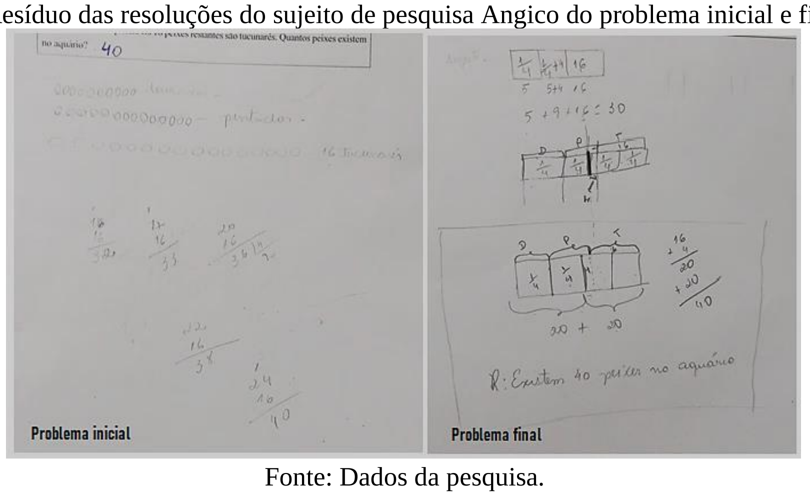
Angico: — 16 + 4 é 20, então aqui é a metade.

Orientador: — Se a metade é 20, o aquário todo vai dar?

Angico: — É 10 o um quarto! Agora lembrei da minha resposta, era 40! Mesmo que tinha dado.

Nesta última enunciação, Angico afirma que o resultado encontrado com o recurso Modelo de Barras está correto, pois era a mesma quantidade do problema inicial o qual resolveu com outra estratégia pictórica, conforme a figura abaixo.

Figura 66. Resíduo das resoluções do sujeito de pesquisa Angico do problema inicial e final Aquário.



Fonte: Dados da pesquisa.

Tarumã chama o orientador para ajudar a esclarecer o problema.

Tarumã: — Professor o um quarto está aqui, se aqui é um quarto aqui é o dobro do aquário [...].

Orientador: — Vou pegar lápis de cor, um momento! Pinta os pintados [...].

Tarumã: — Pinto 4?

Orientador: — Veja, o 4 é a mais [...].

Tarumã: — Não estou entendendo!

Orientador: — Você está fazendo em várias barras [...]

Tarumã: — Então tenho que fazer em apenas uma [...].

Orientador: — Isso mesmo! Divide em quatro partes e pinta cada peixe [...].

Tarumã: — Ah! O mesmo tamanho do dourado mais um pedaço desse aqui seria o pintado.

Orientador: — Essa parte mais o restante [...].

Tarumã: — Ficou 4 + 16 que dá 20.

Orientador: — Esse 20 é o que?

Tarumã: — Os peixes!

Orientador: — Olha para a barra! Esse 20 é metade do aquário.

Tarumã: — Mas aqui eu não sei a quantidade, vou colocar o x. Como faço agora?

Orientador: — Vamos montar a expressão então. Coloca aí dois quartos de x igual a 20.

Sujeito de pesquisa Tarumã resolvendo.

Tarumã: — Deu 40!

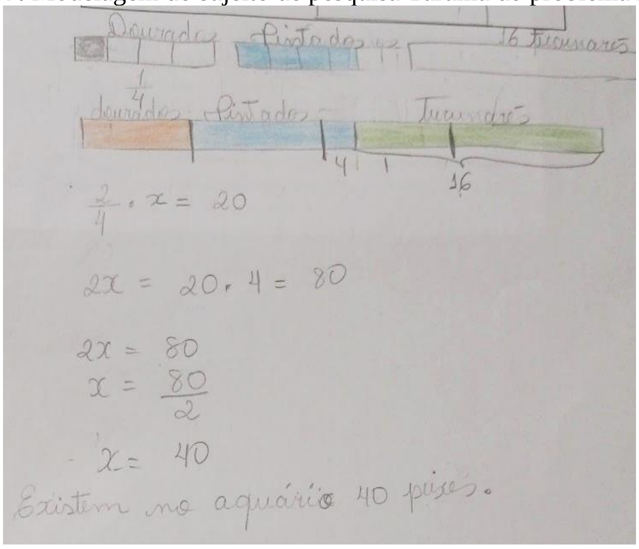
Orientador: — E aí?

Tarumã: — É muito mais fácil fazer pelas barras! Você entendeu?

Jequitibá: — Sim! Nós aprendemos muito mais com as barras (referindo-se as estratégias e técnicas aprendidas no curso).

Tarumã: — É mesmo, esse probleminha aqui lembrei de fração, de expressão algébrica, até pintar eu pintei, envolve muita coisa legal da matemática [...].

Figura 67. Modelagem do sujeito de pesquisa Tarumã do problema Aquário.



Fonte: Dados da pesquisa.

O registro da Tarumã sugere que o recurso Modelo de Barras produziu significado para a atividade, despertando não somente o desejo de encontrar a resposta, como também o interesse em resolver o problema, seguindo as etapas de resolução de problema.

Assim, o desenvolvimento do problema por meio do recurso Modelo de Barras, despertou nos sujeitos de pesquisa efeitos como segurança em resolver outros problemas, interesse em conhecer outras estratégias pedagógicas, desenvolver o raciocínio a partir de estratégias lúdicas, empatia, este é possível verificar na enunciação a seguir.

Aroeira: — Agora sei o que os alunos sentem!

Sibipiruna: — Só com a barra nós conseguimos! É fácil!

Araticum: — Fácil! Consegui entender o processo, mas com o professor auxiliando!

Angico: — Cheguei no resultado, mas não lembro como fiz no primeiro.

Orientador: — Não deixa se envolver com o que você já fez, desapega.

Ao fim do tempo estabelecido, recolhi os problemas. Na entrega os professores enunciaram:

Aroeira: — Não consigo entender para fazer essa barra!

Palmeira: — Sério! Na verdade, queria saber a resposta primeiro, então ia entender.

Aroeira: — Agora sei o que os alunos sentem.

Jenipapo: — Gente o desespero que dá você esquece tudo!

Tarumã: — Fiz certinho! Pintei!

Percebi que alguns professores queriam o problema novamente para escrever a resposta por extenso.

Palmeira: — Esqueci de colocar a resposta!

Jenipapo: — Entreguei, mas esqueci de colocar a resposta!

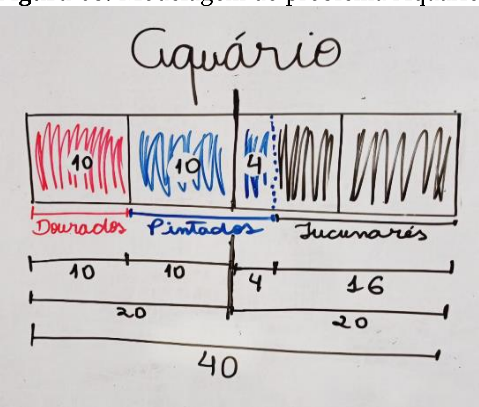
Sibipiruna: — Achei que era só eu!

Pesquisadora: — Quer dizer que vocês não seguiram as etapas?

Jenipapo: — Isso aqui vai ser importante para nós corrigir hábitos.

Iniciei o processo de resolução do problema, enfatizando sobre a importância das etapas de Polya, sendo que são passos que ajudam na construção das barras. Assim, após leitura do problema, iniciou a modelagem das barras, conforme figura a seguir.

Figura 68. Modelagem do problema Aquário.



Fonte: Dados da pesquisa.

Angico: — Só fiz um pouquinho diferente para achar o um quarto ali!

Jenipapo: — Interessante!

Jacarandá: — Foi a continha que fizemos aqui!

Jenipapo: — 10 + 10 = 20, é a metade! Quando a gente vai fazer fica com medo, insegurança!

Pesquisadora participante: — Dizer que não é fácil e que quero aprender, acho que não é fácil para ninguém!

Jacarandá: — Ainda mais para professor!

Jenipapo: — É aí que vem a questão do aluno! Porque eles avançam no tecnológico mais do que a gente [...].

Jacarandá: — Mas, se falarmos para os alunos, vamos aprender juntos, eles se soltam.

Ao fim da resolução do problema, perguntei aos professores o que notaram de diferente na resolução do problema inicial para o problema final.

Palmeira: — Mudou muita coisa, principalmente porque se você olhar na minha resposta, escrevi que não consegui fazer, na verdade, não consegui responder, na primeira. Agora, já fiz assim, cheguei num resultado que não foi o 40, igual do Angico, mas cheguei no 36. Mas, percebi o tamanho do passo que eu dei de na compreensão de olhar o problema e consegui fazer na barra pelo menos uma grande parte, mas mudou muito [...] segui as etapas, coloquei a leitura do problema, separei certinho, e aí já vou moldando na barra [...].

Com o intuito de ouvi-los, entreguei as folhas com os problemas, inicial e final, a fim de fazerem seus contrastes.

Sibipiruna: — Avancei!

Jenipapo: — Ah! Eu até que estava indo na linha de raciocínio [...].

Palmeira: — Não consegui chegar em nenhuma fórmula [...].

Jenipapo: — Misericórdia! [...].

Jacarandá: —Diria que ele teria avançado! Porque no começo não escrevi foi nada, achava que faltava informação. Agora consegui localizar o aquário, os peixes, encontrei o número de peixes.

Tarumã: — Nossa! Não imaginava que tinha colocado a resposta aqui, nada a ver! (risos).

Mogno: — Antes não estava entendendo o processo, eu coloquei 20 e juntei com um quarto, eu não entendi, mas vendo agora meu avanço, me sinto feliz.

Jenipapo: — [...] vejo que estou aprimorando!

Sibipiruna: — Não tinha estratégia, faltava estratégia [...] e depois quando fiz com auxílio do professor, eu entendi bem e fiz com o resultado certo.

Angico: — Utilizei aquela estratégia do início, da tabela (referindo-se à estratégia de Suposição), mais 15, mais 16, mais 17 até o resultado eu chegar no um quarto.

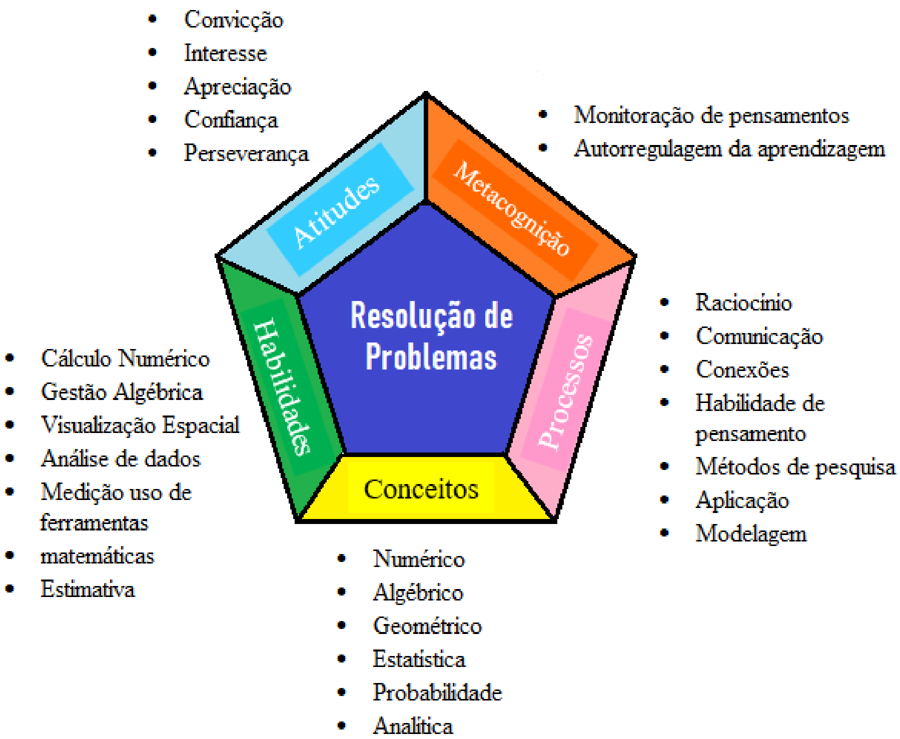
Orientador: — Quem conseguiu resolver o problema no primeiro dia?

Jenipapo: — Não consegui.

Angico: — Eu consegui! Fiz com as bolinhas, acrescentando mais uma, mais uma até chegar no resultado, fiz estratégia de primeiro ano (referindo-se à estratégia por agrupamento).

Finalizando a discussão, projetei o currículo de Singapura, na lousa, a fim de esclarecer aos professores que o Modelo de Barras não é um método desenvolvido em Singapura, sendo uma parte do ensino de Matemática, como também é pretendido alcançar o ensino de Matemática, por meio da resolução de problemas.

Figura 69. Pentágono ilustrativo do Currículo de Singapura.



Fonte: http://www.mathematicshed.com/the-singapore-maths-shed.html (Adaptado).

Antes de finalizar o curso, expliquei aos professores cada elemento estruturante do currículo de Singapura, que conectam ao eixo central: Resolução de Problemas, buscando desenvolver os processos de ensino e de aprendizagem por meio do pensamento e da heurística, surtir efeitos como a convicção, interesse, metacognição, persistência, apreciação e autorregulagem da aprendizagem.

Orientador: — Alguma dessas atitudes foram mobilizadas em vocês aqui no curso?

Palmeira: — Raciocínio!

Jenipapo: — Interesse e apreciação pelo que nós fizemos, *né!*

Sibipiruna: — Modelagem!

Angico: — Metacognição! Porque lá na escola mesmo, a Acácia fez com a estratégia dele, mas nós queríamos criar a nossa, *né*!

Araticum: — Não seria honesto a gente chegar com ele pronto aqui e falar assim: eu sei fazer [...] como eu ia explicar? Eu copiei. Então, eu vou tentar do meu jeito, eu tentei, mesmo assim não consegui.

Pesquisadora: — Com qual você se identificou?

Araticum: — Autorregulagem do aprendizado!

Orientador: — Como vocês aprendem?

Araticum: — Eu só aprendendo fazendo!

Angico: — Eu aprendo desenhando!

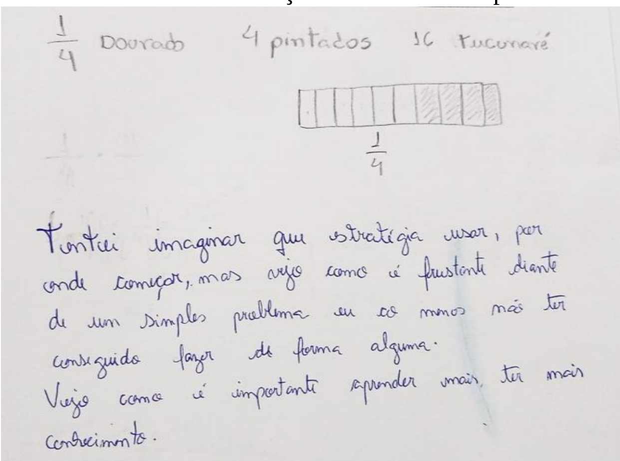
4.3 As análises dos efeitos do modelo de barras

Apresento aqui recortes das leituras da aplicação do problema inicial e do problema final com o propósito de exemplificar os modos de produção de significado que conduziram este estudo, na busca de coerências, que acredito legitimar as justificações dos professores, no que se refere aos efeitos do uso do recurso Modelo de Barras.

Embora o problema (Aquário) tenha sido considerado complexo de resolver, muitos professores apresentaram justificativas como respostas. Segundo eles, a dificuldade foi produzir significado a partir das informações do problema, por vezes, alegaram que não havia dados suficientes no problema, o que dificultava seguir uma mesma direção a qual fora apresentada a eles.

> Não é *justificativa*. Não é explicação para o que digo. Não é algum tipo *de conexão lógica com coisas sabidas*. É apenas o que o sujeito do conhecimento (aquele que o produz, o enuncia) acredita que o autoriza a dizer o que diz (LINS, 2012, p. 21, grifo do autor).

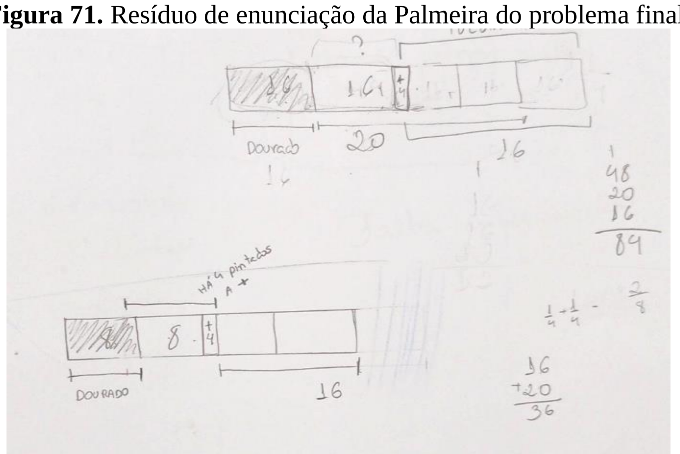
Figura 70. Resíduo de enunciação da Palmeira do problema inicial.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao fazer a leitura da Palmeira "Pode recolher. Pode olhar porque eu quero aprender e eu não sei!", observei que, para ela o "monstro monstruoso pode tornar-se de estimação, mas isto não quer dizer que eu queira viver lá, onde ele mora" (LINS, 2004, p. 112). Por meio do resíduo de enunciação dessa professora observei que ela reconhece a necessidade de aprender a resolver problemas.

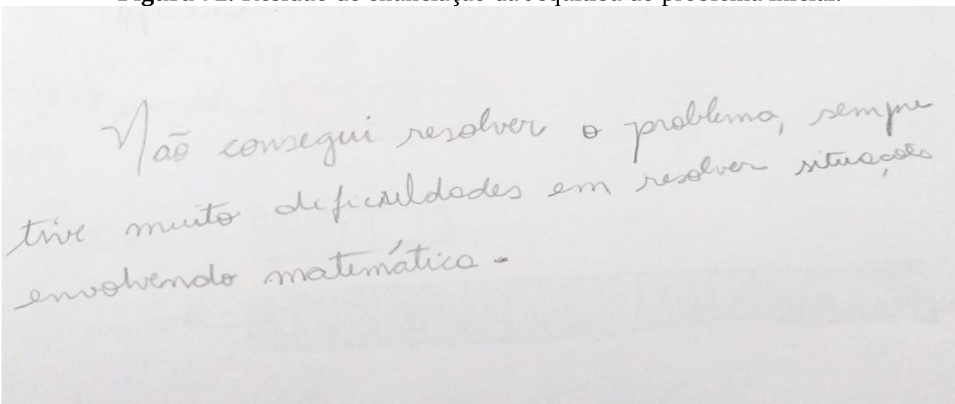
Figura 71. Resíduo de enunciação da Palmeira do problema final.



Fonte: Dados da pesquisa.

Aqui identifiquei um início de reflexão sobre os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras que possibilitou a (re)construção dos modos de produzir significados para ela, apesar de não ter encontrado o resultado do problema. Contudo, é perceptível que o método tenha modificado seu modo de resolver problema, uma vez que apresenta a “tentativa de solução” por meio da modelagem com barras. No resíduo de enunciação da Jequitibá, efetuei uma leitura positiva, pois o objetivo foi “saber *onde o outro* (cognitivo) está” (LINS, 2012, p. 24).

Figura 72. Resíduo de enunciação da Jequitibá do problema inicial.


Não consegui resolver o problema, sempre tive muito dificuldades em resolver situações envolvendo matemática.

Fonte: Dados da pesquisa.

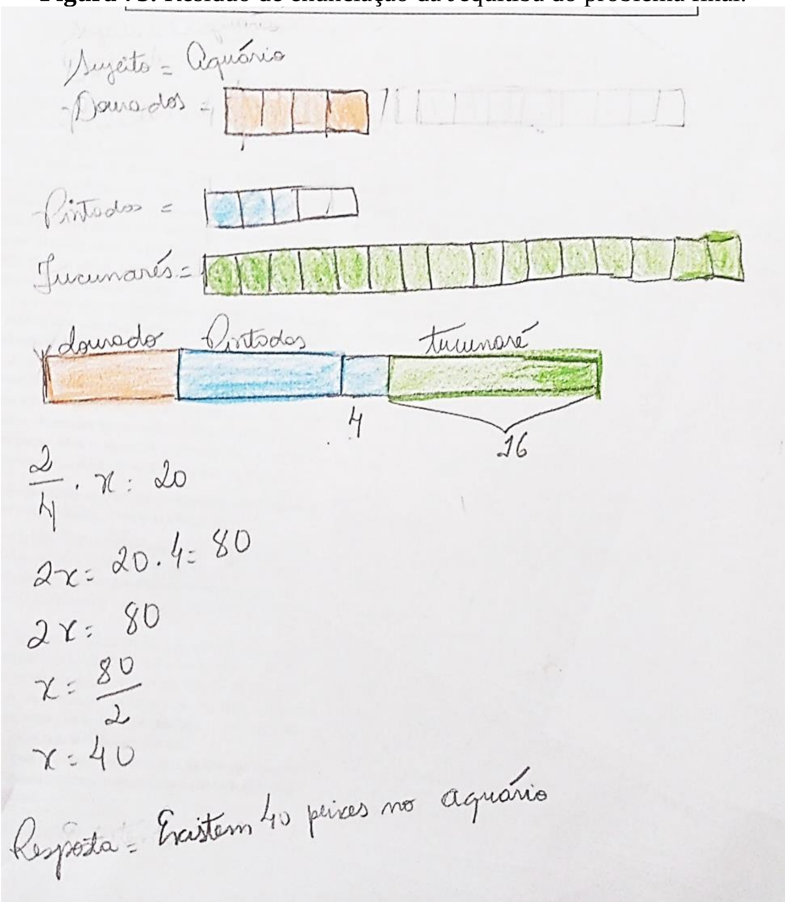
Ao fazer a leitura plausível do resíduo de enunciação apresentado acima e da enunciação descrita na aplicação do problema, quando autoriza dizer *“logo fração, minha inimiga'. Terror fração, não sei fazer fração!”*, compreendi que as especificidades com relação à resolução de problemas, se fazem presentes desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, ou seja, fazem parte da sua vida escolar, permanecendo ancoradas no seu cotidiano.

Para a maioria dos envolvidos foi possível perceber que fração é o “mostro monstruoso”, quando Palmeira diz que fração é sua “inimiga” é preferível para ela deixar “o monstro escapar porque assim posso retomar minha paz” (LINS, 2004, p.106), bem como para Araticum quando diz que “*Matemática não é comigo!*”, observei que sua direção também é outra, deixar de fazer traria tranquilidade, justificando que a Matemática não é, de fato, sua área afim.

Contudo, ao comparar as resoluções apresentadas, notei que o recurso Modelo de Barras ampliou o repertório das professoras, uma vez que contribuiu para a produção de conhecimento das envolvidas. No MCS de Lins (1999, p. 88), a noção de conhecimento é apresentada como “uma crença-afirmação com uma justificação que me autoriza a produzir aquela enunciação”.

Para as professoras conhecer o recurso Modelo de Barras despertou a curiosidade e, na sequência, maior interesse em executar tarefas que não existiam antes na rotina. Ao fazer a leitura plausível da Jequitibá, verifiquei que constitui a seguinte ideia: aprendeu a resolver problemas, pois seguiu a proposta da pesquisa: resolver o problema seguindo as etapas de Polya, para modelar com as barras.

Figura 73. Resíduo de enunciação da Jequitibá do problema final.



Fonte: Dados da pesquisa.

Diante dos resíduos de enunciação em que fiz a leitura plausível compreendi que a expectativa de saber se os professores utilizariam o recurso Modelo de Barras e as etapas de Polya, para resolver problemas foi alcançada no problema final, uma vez que apresentaram resoluções na mesma direção. Como exemplo disso busquei em Lins (2012, p. 24) “mapear o terreno ao mesmo tempo que trata de saber onde o outro está”, identificando no resíduo de enunciação da Jequitibá a direção que estava, se com o desenvolvimento do curso conseguiu atingir a nossa expectativa, conforme a seguir:

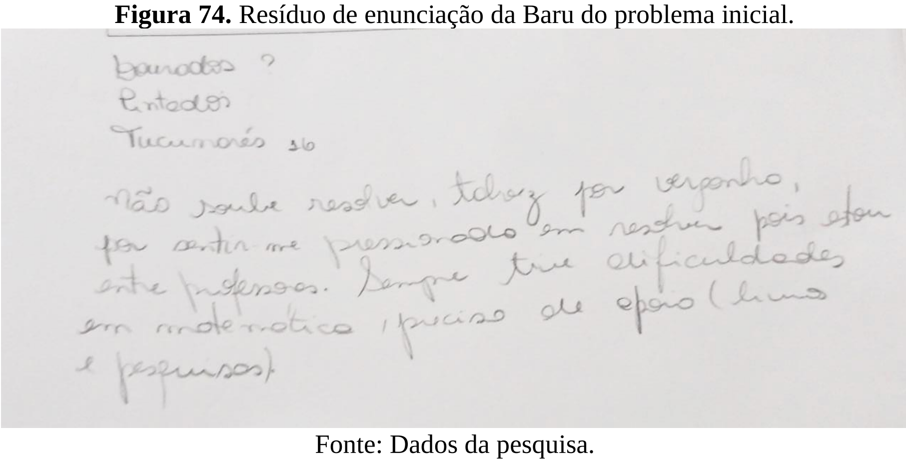
i. *Organizou os dados* (Primeira etapa - a compreensão do problema);
ii. *Esquematizou seu raciocínio utilizando barras* (Segunda etapa - o estabelecimento de um plano);
iii. *Resolveu o problema utilizando técnicas de resolução de equação de 1º grau* (Terceira etapa - a execução do plano);
iv. *Respondeu à pergunta do problema* (Quarta etapa - a reflexão sobre a estratégia de resolução adotada).

Diante da leitura de sua enunciação descrita na aplicação do problema final: *"Nós aprendemos muito mais com as barras",* os indicativos de efeitos do uso do recurso Modelo de Barras são persistência e segurança, em consequência da constância de seguir as etapas, acabou resolvendo o problema, produziu significado. Logo entendo que terá mais segurança para resolver outros problemas, como poderá produzir seus próprios problemas, para sua sala de aula.

As enunciações, **Mogno:** *"Não quero tentar mais!*" **Jenipapo:** "*Não estou conseguindo fazer, vou passar!*", *[...] Chega, não quero mais*!"**, Baru:** "*Eu sou professora de Português, não sei Matemática!*", trouxe-me a seguinte percepção: resistência ao novo, neste caso aprender o Modelo de Barras, assim como outras estratégias.

Das enunciações citadas, apenas Baru não seguiu com o aprendizado, desistiu de continuar aprendendo o Modelo de Barras, talvez sua justificação esteja de acordo com seu resíduo de enunciação:

Figura 74. Resíduo de enunciação da Baru do problema inicial.

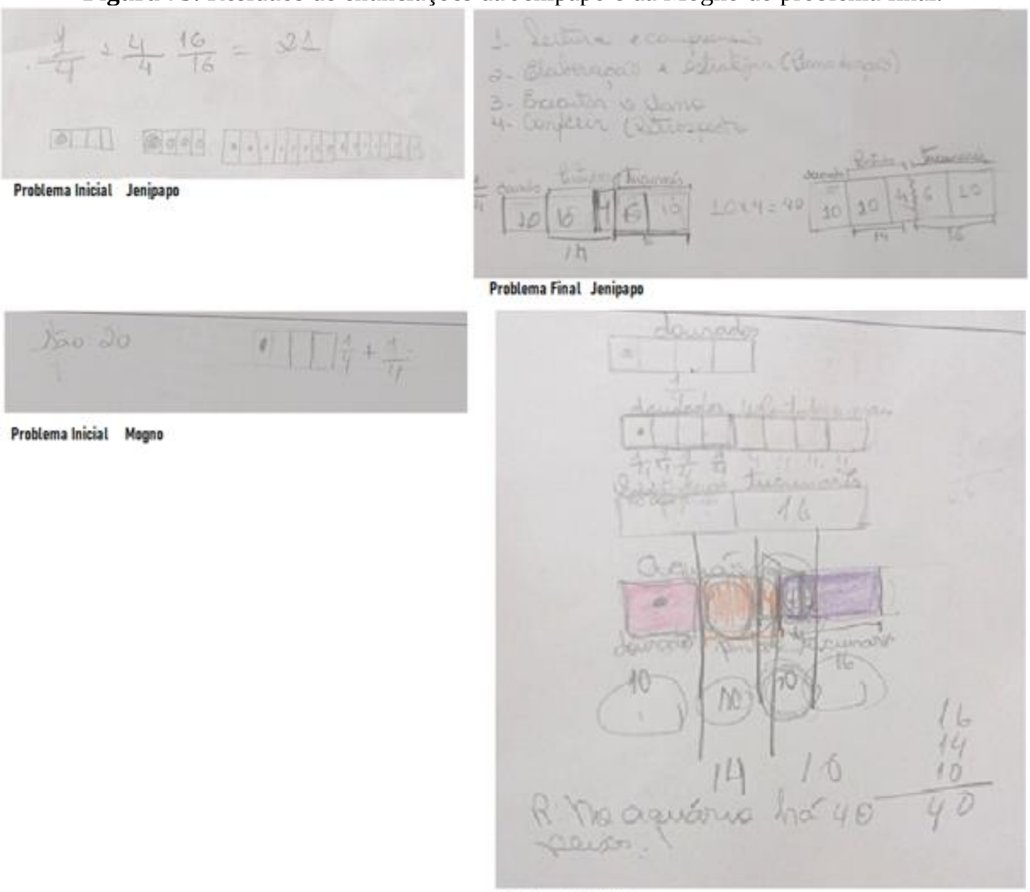

barradas ?
Enteados
Tucumarés 36
Não soube resolver, talvez por vergonha, por sentir-me pressionada em resolver pois estou entre professores. Sempre tive dificuldades em matemática, preciso de apoio (livros e pesquisas)

Fonte: Dados da pesquisa.

Para a construção de conhecimento, segundo os PCN (BRASIL, 1997), é necessário ter disponibilidade em usar instrumentos adequados que conheça e disponha para alcançar a maior compreensão possível. Assim, este conhecimento exige colocar problemas que demandam "buscar soluções e *experimentar novos caminhos*, de maneira totalmente diferente da *aprendizagem mecânica*" (PCN – BRASIL, 1997, p. 64, grifo nosso).

Então, meu olhar para as enunciações em que as professoras entregaram a folha, angustiadas por não terem desenvolvido nenhuma estratégia, despertou a autorreflexão em suas formas de resolver problemas. A complexidade tida por elas no problema as desafiou a continuar participando do curso. Vejo que houve uma participação ativa no processo de aprendizagem por parte delas. Consequência dessa persistência, que é indicativo de efeito do uso do recurso Modelo de Barras, foi a capacidade de resolverem o problema final. Vale ressaltar que auxiliei apenas após várias de suas tentativas de modelar as barras, conforme a figura a seguir.

Figura 75. Resíduos de enunciações da Jenipapo e da Mogno do problema final.



Fonte: Dados da pesquisa.

Contudo, suas resoluções finais evidenciaram modificação na forma de resolver problemas, indicativo de efeito do recurso Modelo de Barras.

> Se o professor espera uma atitude *curiosa e investigativa*, deve propor prioritariamente atividades que exijam essa postura, e *não a passividade*. Deve valorizar o processo e a qualidade, e não apenas *a rapidez na realização*. Deve esperar *estratégias criativas* e *originais* e *não a mesma resposta de todos* (PCN – BRASIL, 1997, p. 64-65, grifo nosso).

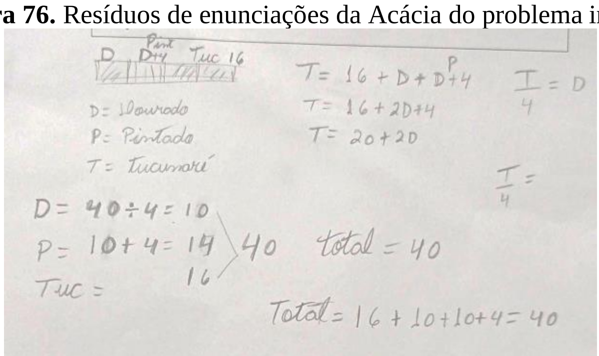
Neste sentido, conforme destacado acima, as estratégias devem ser criativas e originais. Cada sujeito pode resolver do seu modo, naturalmente, sendo assim, foi possível identificar duas resoluções heurísticas, que considero efeitos do uso do recurso Modelo de Barras. Para Polya (2006) o professor deve auxiliar o aluno discretamente e com naturalidade. “O estudante deve *adquirir tanta experiência* pelo trabalho *independente* quanto lhe for possível” (2006, p. 1, grifo nosso).

As enunciações, **Acácia:** “Ainda bem que a pesquisa era para mostrar que *antes do curso eu não sabia* fazer isso!” **Angico:** “Fui *desenhando, desenhando*, mas não consegui!”, **Acácia:** “Matematicamente não deu certo, então eu *resolvi no chute*!”, **Angico:** “*Utilizei aquela estratégia do início, da tabela (Suposição),* mais 15, mais 16, mais 17 até o resultado eu chegar no um quarto”, mostraram que é possível resolver problemas de diferentes estratégias, sendo elas consideradas como legítimas.

> Nenhum conhecimento vem ao mundo ingenuamente. Aquele que o *produz*, que o *enuncia*, já fala em uma direção (o *interlocutor*) na qual o que ele diz, e com a justificação que tem, *pode ser dito*. Esta direção representa uma legitimidade que internalizou o sujeito, o que é o sujeito de um saber ventríloquo (LINS, 2012, p. 13, grifo do autor).

A seguir, apresento a resolução do problema inicial da Acácia, antes de conhecer o recurso Modelo de Barras.

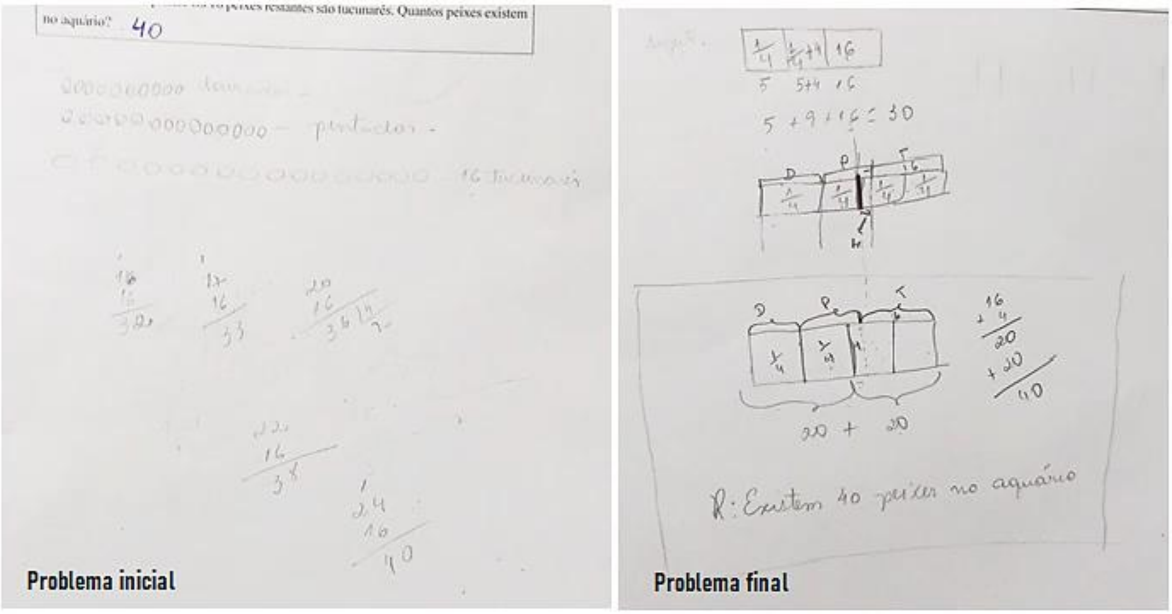
Figura 76. Resíduos de enunciações da Acácia do problema inicial.



Fonte: Dados da pesquisa.

As enunciações da Angico mostraram que é possível resolver problemas com estratégias pedagógicas pictóricas, visto que ela resolveu “desenhando bolinhas”, expressão usada por ela, em sua primeira resolução do problema (Aquário). Contudo, na segunda, resolveu usar o recurso Modelo de Barras. Essa mudança de estratégia pedagógica considero como autorregulagem da aprendizagem, como um efeito do uso do recurso Modelo de Barras.

Figura 77. Resíduo das resoluções do sujeito de pesquisa Angico do problema inicial e final Aquário.

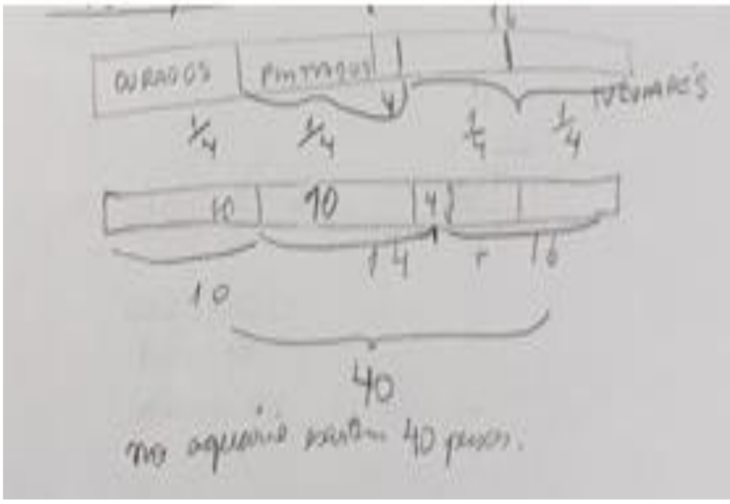


Fonte: Dados da pesquisa.

Por um lado, houve professores que ao tentarem resolver o problema usando as barras desistiram. Na dificuldade de compreender o problema e fazer a modelagem, optou por descontinuar, não perseverou, sendo esta, perseverança, considerada indicativo de efeito do MB, toma por legítimo o que Angico fizera, conforme sua enunciação: **Itaúba:** “Não sei fazer mais, já apaguei sei lá quantas vezes. *Vou fazer igual o raciocínio do Angico*”.

Como já indiquei, a perseverança de enfrentar o desafio de resolver o problema, pode ser notada no resíduo de enunciação da Sibipiruna, em um outro momento deste trabalho já mencionado, pois gosta de resolver “riscando” ou “desenhando”. Contudo, na etapa de desenvolver sua solução, apresenta que a construção das barras se deu por meio do raciocínio-lógico, antes não produzia significado. Logo, entendi que o recurso Modelo de Barras, para a professora, promoveu conexões com as habilidades de pensamento e raciocínio.

Figura 78. Resíduo da Sibipiruna do problema final.



Fonte: Dados da pesquisa.

Outro ponto relevando que o MCS é sobre o erro. Trago para a discussão a seguinte enunciação: **Araticum:** “Eu *errei* desde o início!”, lembro bem deste momento. Lins objetiva “dar conta de caracterizar o que os alunos estavam pensando quando "erravam", mas sem recorrer a ideia de erro” (LINS, 2012, p. 11). Questionei a estratégia que vinha desenvolvendo, busquei desestabilizar suas certezas intencionalmente a fim de levá-la a confrontar o *conhecimento,* que produzira no curso. Haja vista que, “quando o professor consegue *identificar a causa do erro*, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido” (PCN, p. 41, grifo nosso).

Diante disso, considerei o erro como um processo de ensinar, visto que seu *conhecimento* foi construído nas tentativas, à medida que se pensa, também é preciso repensar o pensado, logo o indicativo de efeito do Modelo de Barras é rever suas construções envolvendo curiosidade e diferentes estratégias.

Com referência a modelagem pelos professores, convém lembrar que, num primeiro momento, a estratégia pode gerar alguma estranheza/especificidade e proporcionar noções superficiais, ideias incompletas e percepções vagas ou errôneas; contudo, deve ser levado em conta a organização do conhecimento linear, pois o êxito vem da livre exploração, outro potencial do Modelo de Barras.

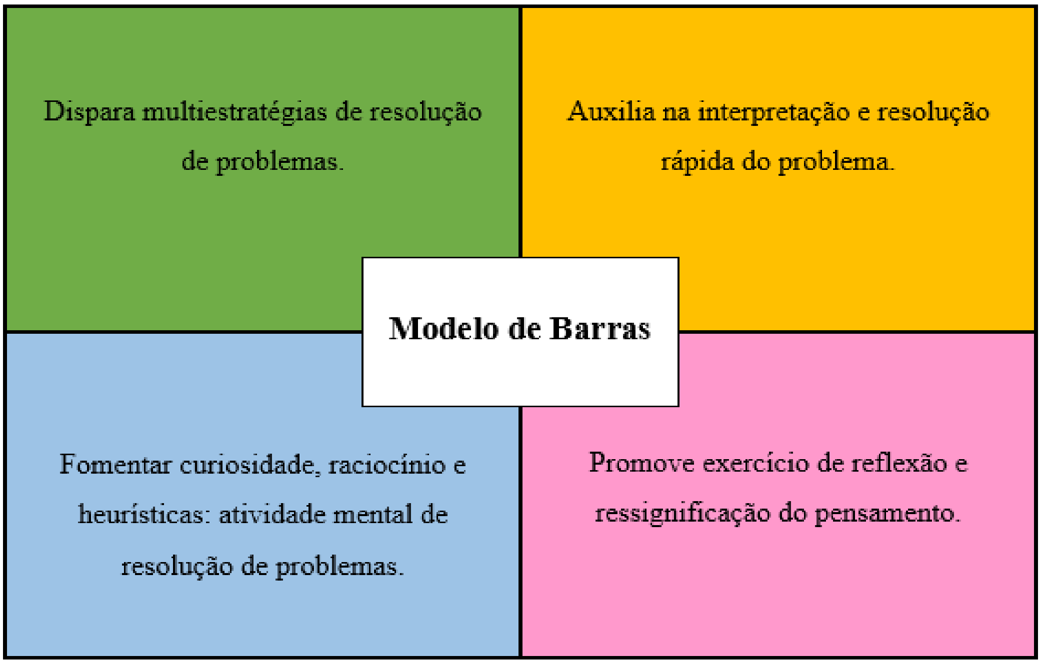
Seguindo, para uma próxima enunciação: **Aroeira:** “Agora eu sei o que *os alunos sentem*!”, percebi neste RE um indicativo de efeito modificação do professor ao avaliar o aluno em suas soluções, para Polya (2006, p. 1) "o professor deve colocar-se no lugar do aluno [...] procurar compreender o que se passa em sua cabeça".

Um outro efeito do Modelo de Barras é percebido nos RE: **Palmeira:** "*Esqueci de colocar a resposta!",* **Jenipapo:** "Entreguei, mas *esqueci de colocar a resposta*!", ela disse: "Isso aqui vai ser importante para nós *corrigir hábitos*". Compreendo que haverá alteração da forma dos professores ensinarem, resolução de problemas, visto que o ato de "corrigir", dito por ela, se direciona à sua postura docente.

Finalmente, um sentimento geral de desenvolvimento profissional e de consolidação de uma atitude reflexiva é também apontado por vários professores como um dos aspectos que consideram mais saliente neste trabalho: **Palmeira:** "*percebi o tamanho do passo que eu dei* de na compreensão de olhar o problema", **Jacarandá:** Eu diria que *teria avançado*! Porque no começo não escrevi foi nada, achava que faltava informação", **Mogno:** "*Antes eu não estava entendendo o processo*, eu coloquei 20 e juntei com um quarto, eu não entendi, *mas vendo agora meu avanço, me sinto feliz*", **Jenipapo:** "[...] vejo que *estou aprimorando*!", sendo que considero indicativo de efeito do Modelo de Barras **Autorregulação do pensamento**.

A partir das leituras, discussões e reflexões, sistematizei no diagrama abaixo as potencialidades do uso do recurso Modelo de Barras, apontadas a partir das percepções dos professores referentes à Ação Formativa (Curso e Grupo de Trabalho).

Figura 79. Potencialidades do Modelo de Barras.



Fonte: Dados da pesquisa.

Diante das análises, saliento que a primeira etapa da ação formativa, curso com os professores, foi determinante para o sucesso deste trabalho, disparou as primeiras ideias sobre as potencialidades do uso do recurso Modelo de Barras, no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas.

Como já tive a oportunidade de referir na sequência das leituras, torno agora pertinente destacar do vasto conjunto de efeitos subjacentes ao recurso Modelo de Barras, as vantagens em adotá-lo no processo de ensino e de aprendizagem no 2º ciclo do Ensino Fundamental:

1) Propõe experimentação genuína da construção do pensamento matemático, que se dá por meio do exercício prático, fundamentando o pensamento abstrato, tão característico da Matemática;

2) Desperta o interesse de quem aprende, pois promove atividade mental, bem como capacita o sujeito pensar matemática, a partir de construções lógicas e visualizar abstrações e generalizações, características naturais do pensamento matemático;

3) Ajuda organizar e registrar o que se está fazendo, visto que, a modelagem com as barras leva o sujeito ao levantamento de hipóteses e a elaboração e testagem de estratégias pedagógicas que, por vezes, estavam previstas no planejamento, porém, não eram do conhecimento do professor;

4) Constitui um espaço comunicativo, no qual o professor e aluno no qual ampliam suas condições e identificam o que fazem, ajudando também saber aonde o outro está, qual estratégia está pretendendo executar e aonde quer chegar.

Concluo que a experiência com professores sobre o uso do recurso Modelo de Barras não se mostrou como um recurso que favorece o adiantamento dos conceitos matemáticos, entretanto se revelou propício a antecipação da abordagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acredito que para compor as considerações finais sobre esta pesquisa preciso retomar algumas questões, apontadas no decorrer de todo o trabalho. Relativamente ao futuro enquanto professora, todo o percurso que realizei até agora contribuiu para minha nova forma de olhar minha postura docente e fez ter uma variação de aprendizagem, como já foi dito na Seção I. Contudo, as aprendizagens de um professor não param, devemos sempre evoluir, aprender a aprender e expandir o conhecimento. Considero que, apesar de neste momento, o mestrado estar quase concluído, sou uma eterna estudante.

Foi uma experiência de aprendizagem ímpar ingressar no programa de mestrado profissional e o desafio da investigação e elaboração do produto educacional, voltado aos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas, no 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental. Permitiu também perceber minhas especificidades com relação ao objeto de estudo, assim como identificação e aplicação na minha trajetória profissional.

Essa investigação contribuiu bastante para o desenvolvimento profissional, uma vez que foi impossível trabalhar com recurso pedagógico de ensino e de aprendizagem diferente do que é conhecido. Foi uma aprendizagem bastante positiva pela partilha de algumas estratégias pedagógicas, para trabalhar a resolução de problemas por parte dos professores.

Volto à Seção I, apresento a motivação da minha pesquisa, pois não encontrei pesquisas realizadas no 2º ciclo do Ensino Fundamental, que me causaram curiosidade com relação ao uso do recurso Modelo de Barras e, sobretudo, não respondem às minhas dúvidas, sendo elas: o recurso Modelo de Barras modificou o modo do professor resolver e de ensinar a resolver problemas? Quais mudanças os professores apontam com relação ao uso do recurso Modelo de Barras inserido no processo de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas?

Em busca de respostas, propus uma Ação Formativa a professores que ensinam Matemática, a fim de apresentar o recurso Modelo de Barras na resolução de problemas, e disposta assim a esclarecer o problema de pesquisa: quais os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras, na resolução de problemas matemáticos, apontados pelos professores no 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental?

Então, começou o primeiro desafio de elaborar o produto educacional, sendo um dos objetivos da pesquisa, comprometida em atender às sugestões da banca de Seminários

II, disciplina obrigatória do curso, analisei livros didáticos e materiais apostilados. A partir deles criei problemas para compor a primeira versão do livro, dos quais o intuito foi fazer uma seleção e aplicar na primeira ação formativa, curso sobre o Modelo de Barras. Além de apresentar o recurso Modelo de Barras, o curso serviu para a produção de significados à luz do Modelo dos Campos Semânticos.

Considerando o cenário da Pandemia da COVID-19, tive a oportunidade de desenvolver a Ação Formativa de forma presencial, sendo preciso ajustar o cronograma da pesquisa. Contudo, foi possível alcançar o objetivo de analisar e compreender as visões dos professores, que ensinam Matemática sobre os possíveis efeitos do uso do recurso Modelo de Barras, estreitando lacunas e, assim, com o Grupo de Trabalho (GT) constitui um espaço comunicativo que aproximou diálogos e opiniões sobre as potencialidades do recurso, uma vez que, a metodologia adotada permitiu a construção dos resultados.

Os professores sinalizaram que suas estratégias pedagógicas para ensinar Matemática eram limitadas e, pouco utilizavam a Resolução de Problemas antes da participação na Ação Formativa, entretanto, no decorrer dos encontros do curso, procuravam problematizar as situações postas aos alunos recorrendo às multiestratégias aprendidas no curso.

Com a participação no Curso, os professores vivenciaram e experimentaram utilizar o recurso Modelo de Barras, de modo a resolver problemas, seguindo as etapas de Polya. Finalizei o curso, me senti realizada, pois acabara o curso, mas o processo de inserção estava apenas começando, para os professores, em sua prática.

Um ponto positivo, os professores sinalizaram inserir em sua prática a modelagem por barras, seguindo as etapas de Polya, na resolução de problemas, assim como o uso de material concreto que, segundo eles, ampliou o repertório docente.

Outro ponto importante, os professores indicaram que a forma de preparar aulas também passaria por uma diversificação, pois sentiam-se mais seguros para a mudança de ensinar e até mesmo levar as estratégias pedagógicas apresentadas no curso para os alunos.

A Ação Formativa foi considerada importante pelos professores. Percebi o empenho e o desempenho deles durante o curso que foram relevantes para a (re)construção de seus conhecimentos, tanto os específicos em Matemática, quanto os pedagógicos.

O referencial teórico foi pertinente e adequado para o desenvolvimento da pesquisa, pois permitiu que os pressupostos tecidos no trabalho, sustentassem as diferentes visões dos professores, que ensinam matemática, e fez com que pudesse "ler" os resíduos de enunciação dos professores, na perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos (Lins, 1999, 2012).

Com relação à Ação Formativa, percebi que houve uma diferença entre quem participou apenas da primeira fase da formação e quem participou das duas. Essa diferença se deu pelo fato do Grupo de Trabalho proporcionar esclarecimento de dúvidas e trocas, de como foi aplicar o recurso Modelo de Barras em sala.

Para uma futura ação de formação recomendo, em termos de organização, um curso em um período maior, com mais aplicação de problemas, conforme seu tipo, para promover familiaridade, com o recurso Modelo de Barras.

Considero que a Ação Formativa foi adequada, pois possibilitou uma produção de dados suficientes para a pesquisa, como também abriu um leque de outras oportunidades, de proporcionar uma nova formação continuada.

À vista dos problemas desenvolvidos pelos professores, o recurso Modelo de Barras tem inúmeras potencialidades, principalmente, por se tratar de um disparador de multiestratégias pedagógicas de resolução de problemas. Embora a complexidade, fica a critério do professor, adaptar os problemas aos diferentes anos de escolarização que se pretende fazer o uso.

Sugiro ampliar os estudos sobre o recurso Modelo de Barras num processo contínuo, visto que, a Pandemia da COVID-19 impossibilitou os professores de aplicar todos os problemas com suas turmas. Faz-se útil levar em consideração, que o propósito da pesquisadora em legitimar e validar seu produto educacional foi alcançado, quando teve as devolutivas dos professores, na aplicação dos problemas e no GT, em que surgiram adequações.

Com referência a modelagem pelos professores, convém lembrar que o recurso gerou estranheza/especificidade e proporcionou noções superficiais, que levaram os professores a livre exploração do recurso, outro potencial do Modelo de Barras.

Quando ensinamos Matemática, esperamos que os estudantes sejam capazes de desenvolver suas habilidades matemáticas, nos processos de pensamento lógico para que apliquem em situações matemáticas da vida real. Por isso, pedagogas e professores que ensinam matemática para seu repertório, precisam munir-se de ferramentas que ofereçam aos estudantes, outras estratégias para que a partir delas possam adentrar em suas heurísticas, sem medo e com autonomia em fazer e resolver problemas.

A experiência com os professores na Ação Formativa, curso sobre o recurso Modelo de Barras, não se mostrou uma estratégia que favoreceu o adiantamento ou aceleramento da quantidade de conteúdos e dos conceitos matemáticos.

O grupo de trabalho revelou que tanto ele, quanto os alunos foram sensibilizados a respeito das etapas de resolução de problemas, ao aplicarem o recurso Modelo de Barras, de forma voluntária. Também disseram que incluíram e ampliaram o uso de material concreto, como Ábaco e Material Dourado. Revelaram também se sentirem mais seguras para apresentar aos alunos, problemas e seguir as estratégias do aluno, mesmo que as desconheça.

Então, o recurso Modelo de Barras se insere nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas por meio dos efeitos de:

- **Alteração da forma dos professores resolverem e ensinarem problemas** a partir dos resíduos de enunciações de Palmeira e Jenipapo: "*Esqueci de colocar a resposta!*", "*Entreguei, mas esqueci de colocar a resposta!*", "*Isso aqui vai ser importante para nós corrigir hábitos*";
- **Sentir mais segurança para trabalhar com resolução de problemas** a partir dos resíduos de enunciações de Mogno, Jenipapo e Itaúba, da questão 2, do questionário aplicado, apresentarem "*mais segurança para resolver problemas*" porque "*as barras facilitam a visualização do problema*".
- **Possibilidade de resolver problemas usando materiais e recursos manipuláveis (Ábaco e Material Dourado, por exemplo)** a partir dos resíduos de enunciações de Sibipiruna "*... estou iniciando a primeira fase do concreto, fiz só um pouquinho por causa do nível deles, tem muita criança que ainda não sabe ler e escrever na minha turma*", "*passei a dar mais importância o uso de materiais concretos e material dourado, visto que favorece uma melhor compreensão da aritmética, operações, trocas e agrupamentos matemáticos*";
- **Adequação e elaboração de problemas a partir do livro didático usado na escola, de acordo com as prescrições da BNCC** a partir dos resíduos de enunciações de Sibipiruna e Jenipapo: "[...] *não consegui aplicar ainda os problemas do curso, mas eles serviram para que eu pudesse adaptar problemas do livro didático, para a realidade da minha turma, norteou as*

ideias, eu nem olhei o livro didático, apenas fiz um trabalho de repertório”, “*estive olhando o livro didático que estou com o 5º ano e tem algumas situações que dá para gente pegar e adaptar com esse Modelo de Barras* [...]”;

- **Persistência em buscar uma solução para o problema** a partir das enunciações dos sujeitos durante a aplicação do problema final – Aquário;
- **Sensibilização para que o professor modifique a forma de avaliação** a partir dos resíduos de enunciações de Jenipapo e Sibipiruna: “*Deixa ver se entendi, preciso aprender direitinho essa estratégia porque vai dar certinho para meus alunos com dificuldade!*”, “*Ah, quero aprender todas as estratégias, se não der certo com essa, faço com àquela todos vão aprender!*”;
- **Mudança da dinâmica da turma e das aulas** a partir do resíduo de enunciação de Sibipiruna apontado em seu relato de experiência em que mudou de ambiente físico da sala de aula para o estacionamento da escola a fim de constituir um espaço comunicativo em que todos pudessem compreender a resolução do problema, em que percebeu uma turma menos agitada e mais participativa;
- **Interesse por parte dos alunos em aprender matemática,** a partir do resíduo de enunciação de Sibipiruna: “*meus alunos se identificaram com a estratégia das barras e, ao resolver qualquer probleminha a primeira estratégia escolhida é o Modelo de Barras*”, “*minha aluninha disse que prefere fazer com o desenho das barras porque é bem fácil*”;
- **Contribui para trabalhar de forma inclusiva ou com sala heterogênea** a partir do resíduo de enunciação de Jenipapo “*Vocês explicando aqui eu já estou tendo uma ideia para o meu autista, de trabalhar no concreto, fazendo a barra numa caixa e levar ele nessa quantidade*”.

Tendo em vista o futuro, considero que a realização deste trabalho foi importante pelo fato de ter permitido a construção de novos conhecimentos relacionados ao recurso Modelo de Barras, visto que estes sinalizaram suas potencialidades (Figura 79), sendo elas: disparar multiestratégias pedagógicas de resolução de problemas, auxiliar na interpretação e resolução rápida do problema, fomentar curiosidade, raciocínio, heurísticas, promover o exercício de reflexão e ressignificação do pensamento.

Com relação ao produto educacional, sua versão final está disponível no site do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM), o qual pode ser acessado pelo seguinte endereço https://www.ufmt.br/curso/ppgecm.

Um dos objetivos da pesquisa era a elaboração e a aplicação do produto educacional, que foi alcançado, e vislumbro sua aplicação em salas de aulas para que outros professores e alunos possam conhecer o recurso Modelo de Barras.

Para o futuro acredito ser interessante fazer uma investigação sobre a aplicação do recurso Modelo de Barras, pelos professores com seus alunos e até acompanhar a evolução deles, visto que há uma necessidade de ampliar formações continuadas nesta área. Para isso, recomendo uma articulação de duas etapas de formação, Curso e Grupo de Trabalho.

Enfim, reforço que a pesquisa se conecta a um leque de possibilidades, até mesmo para futuras pesquisas direcionadas à educação infantil, anos iniciais e finais, ensino médio e à graduação em licenciatura de pedagogos e matemáticos.

REFERÊNCIAS

ABREU, J. C. F. **Construção e gestão de materiais pedagógicos no ensino da matemática: uma adaptação do Método de Singapura no contexto da Educação Pré-Escolar e do 1º Ciclo do Ensino Básico**. Relatório de Estágio da Universidade dos Açores, Ponta Delgada, 2017.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas**. Resolução de problemas: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, n. 35, 2014.

ARÊDE e SILVA, S. B. **Resolução de problemas e o método da barra: um estudo com alunos do 1.º ano de escolaridade.** Relatório de Estágio do Instituto Superior de Educação e Ciências, Lisboa, 2016.

BATHELT, R. E. **Ensaios para um modo de ler modelos didático-teóricos em educação matemática:** um estudo sobre a ótica do Modelo dos Campos Semânticos. 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

CABRAL, J. **O Método Kumon versus método de Singapura no ensino da Matemática**. Artigo de Doutorado em Matemática pela Universidade dos Açores, Portugal, 2015.

CINTRA, C. C. **Proposta para o Ensino de Frações para o 7 ano: do Diagnóstico à Aprendizagem Mediada por Modelo de Barras**. Dissertação de Mestrado da Universidade de São Carlos, São Carlos, 2017.

DANTE, L. R. **Criatividade e resolução de problemas na prática educativa matemática**. Tese de Livre Docência do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 1988.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **O planejamento da pesquisa qualitativa:** teorias e abordagens. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006.

DOTTI, T. G. P. **Um Estudo do Modelo de Barras nos Livros Didáticos da Matemática de Singapura: Fundamentação da Álgebra no Ensino Fundamental I Ciclo.** 88 f. Trabalho de Conclusão de Curso da Universidade de São Carlos, São Carlos, 2016.

GOIS, R. C. **O efeito do Material Concreto e do Modelo de Barras no Processo de Aprendizagem Significativa do Conteúdo Curricular de Frações pelos Alunos de 7º**

Ano do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado da Universidade de São Carlos, São Carlos, 2014.

GONTIJO, C. H. Criatividade em Matemática: um olhar sob a Perspectiva de Sistemas. **Zetetike**, v. 15, n. 2, p. 153-172, 2007.

LIMA, A. M. et al. **A Resolução de Problemas no 2º Ano de Escolaridade: Uma Sequência de Aprendizagem do Modelo de Barras**. Artigo da Revista: O Jornal das Primeiras Matemáticas - Número 8 da Universidade dos Açores, 2017.

LINS, R. C. **Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática.** Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Rio Claro: UNESP, p. 75-94, 1999.

Lins, R. C. The production of meaning for algebra: a perspective based on a Theoretical Model of Semantic Fields; *In:* " SUTHERLAND, R. et al. **Perspectives on School Algebra**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.

LINS, R. C. **Matemática, monstros, significados e educação matemática.** Educação matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, p. 92-120, 2004.

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: LAUS, C. et al. (Orgs.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história**. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 11-30.

MALTA, G. H.; LOPES, S. A. **A Resolução de Problemas pelo Método Pictórico.** Dissertação de Mestrado da Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2018.

MATO GROSSO. **Documento de Referência Curricular para Mato Grosso Ensino Fundamental Anos Iniciais.** Cuiabá: SEDUC, 2018. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1z9YmiOlRBNYVpExIK6yfACoA99wvK-cW/view. Acesso em: 27 fev 2022.

OECD. **PISA 2018 Insights and Interpretations**; OECD: Paris, França, 2019. pp. 1-64. Disponível em: https://www.oecd.org/pisa/PISA%202018%20Insights%20and%20Interpretations%20FINAL%20PDF.pdf Acesso em: 11 jul. 2020.

OVANDO, E. C. B. **Sobre um processo de elaboração de propostas de trabalho de matemática para o ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução Heitor Lisboa de Araújo. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PORTO, S. C. A.; COSTA, N. M. L. **Educação Continuada e a Inserção da Resolução de Problemas no Ensino de Matemática**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v. 11, n. 3, p. 270-281, São Paulo, 2018.

POZO, J. **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

QUEIROZ, J. M. S. **Resolução de problemas da Pré-álgebra e Álgebra para Fundamental II do Ensino Básico com Auxílio do Modelo de Barras.** Dissertação de Mestrado da Universidade de São Carlos, São Carlos, 2014.

SAJNIM, C.; ALMEIDA, L. F. **A Representação Pictórica na Resolução de Problemas: explorando o modelo de barras.** Oficina Bienal do Programa de Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

SANTANA, L. A. **Possibilidades na formação de professores de Matemática.** Dissertação de Mestrado da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2017.

SANTOS, J. C. M. **Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de Singapura.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

SIMÕES, L. J. M. **Uma Perspectiva sobre a Abordagem dos Números na Educação Pré-Escolar nos Manuais Escolares em Singapura**. Dissertação de Mestrado do Instituto Superior de Educação e Ciências, Lisboa, 2015.

VIGOTSKI, L. S. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. Trad. Paulo Bezerra, v. 2, 2009.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. et. al. **O uso de categorias do cotidiano para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática**. Edital Universal - - MCTI/CNPq, n. 14, 2014.

WESLEY DA SILVA. D. **Conhecimentos de professores que ensinam matemática em um grupo de trabalho que analisa produções escritas em matemática**. Dissertação de Mestrado da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

ANEXOS

Anexo 1: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para os professores

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO (UFMT)
INSTITUTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, HUMANAS E SOCIAIS (ICNHS)
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM) - Mestrado Profissional

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS PROFESSORES

Você, professor(a), está sendo convidado(a) para participar, como voluntário(a), da primeira parte da ação formativa, **Curso sobre Modelo De Barras**, com carga horária de 20 (vinte horas), dividida em 5(cinco) encontros de 4 horas, que serão realizados em 14/08 a 28/08 de 2021, da pesquisa intitulada **EFEITOS DO MODELO DE BARRAS NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS**. Sua participação não resulta em nenhum tipo de remuneração financeira e não acarretará custos para você. As despesas pertinentes à pesquisa serão assumidas pela pesquisadora, a mestranda Stela Maris Ferrari Streit, sob orientação do Professor Dr. Edson Pereira Barbosa, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM) — Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso, Câmpus de Sinop. Essa pesquisa tem como objetivo analisar, com um grupo de professores que ensinam Matemática no 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, os efeitos do modelo de barras no processo de ensino aprendizagem de resolução de problemas matemáticos.

Os dados da pesquisa serão produzidos por meio de áudio e vídeogravação, fotografias e caderno de atividades. As imagens e sons produzidos durante a pesquisa terão foco nas atividades propostas e nas estratégias pedagógicas que os professores participantes utilizarem para resolvê-las. Fica esclarecido que, caso apareça a imagem dos participantes da pesquisa, ela não será divulgada.

O acesso à análise dos dados produzidos (coletados) será realizado apenas **por membros da equipe de pesquisadores identificados neste termo**. Todas as informações da pesquisa serão usadas para fins acadêmico-científicos e arquivadas em dispositivos digitais, com acesso limitado aos participantes da equipe de pesquisadores. Também podem ser divulgadas em eventos ou publicações científicas, sendo assegurado total sigilo sobre sua participação.

Afirmamos que os **riscos** relacionados com a participação na pesquisa são mínimos, contudo, pode ou não despertar o sentimento de timidez, vergonha, desconforto, inquietude. Mas, caso o participante se sinta desconfortável, poderá solicitar cessação temporária da participação que será prontamente atendido, bem como poderá desistir de participar da pesquisa em qualquer momento, sendo seus dados excluídos do trabalho. Por esse motivo, os procedimentos deste estudo serão adotados de forma a provocar o menor nível de desconforto possível, deixaremos o ambiente o mais agradável e proveitoso.

Informamos ainda que, caso surjam informações significativas sobre o assunto da pesquisa, as partes envolvidas serão informadas.

Entendemos que os **benefícios** da nossa pesquisa contribuirão no ensino-aprendizagem de matemática no 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, possibilitando aos participantes conhecer um novo recurso utilizado para resolver problemas matemáticos — o modelo de barras — e adquirir um novo repertório para sua atuação profissional em sala de aula.

Os encontros da ação formativa, Curso e Grupo de Trabalho (GT), serão organizados nas dependências do Câmpus Universitário de Sinop (Oficina de Matemática, Auditório ou Salas de aula), observando as recomendações das autoridades sanitárias e do Comitê de Enfrentamento e Planejamento de Ações Referentes à COVID-19 do Câmpus Universitário de Sinop (CEAP/CUS/UFMT).

Em caso de recusa, você não terá nenhum prejuízo em sua relação com o pesquisador ou com a instituição.

Abaixo constam nomes, endereço e número do telefone da equipe envolvida no projeto, com quem poderá contactar, quando julgar necessário, em caso de dúvidas relacionadas à pesquisa ou a algum problema.

Pesquisadora responsável	**Convidada – Membro da equipe**	**Professor orientador**
Mestranda Stela Maris Ferrari Streit Sinop (MT) Telefone: (66) 9 99603-0720 E-mail: stela_mfs@outlook.com Gmail: stelamfs@gmail.com	Mestranda Gislaine Aparecida Maria Zambiasi Caixa Postal 285 – Sinop (MT) Telefone: (66) 9 9991-0807 e 3515-8224 E-mail: gisa.snp@hotmail.com	Dr. Edson Pereira Barbosa E-mail: edsonpb@hotmail.com Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM) - Mestrado Profissional Avenida Alexandre Ferronato, 1200, CEP 78550-728 Residencial Cidade Jardim – Sinop (MT)
Em caso de dúvidas éticas ou algum problema ético Comissão de Ética da UFMT Avenida Alexandre Ferronato, 1200, CEP 78550-728 Residencial Cidade Jardim – Sinop (MT) E-mail: cepsinop@gmail.com Telefone: (66) 3533-3199		

Mestranda STELA MARIS FERRARI STREIT
PESQUISADORA RESPONSÁVEL

Eu, ____, li e concordo em participar da pesquisa e atesto o recebimento de uma via de igual teor assinada deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

Sinop, 09 de agosto de 2021.

____

Assinatura do participante voluntário da pesquisa

Anexo 2: Protocolo de Segurança

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO (UFMT)
INSTITUTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, HUMANAS E SOCIAIS (ICNHS)
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM) - Mestrado Profissional

PROTOCOLO DE SEGURANÇA

Caros participantes,

É com muito prazer que lhes recebemos para o curso **Modelo de Barras como recurso para o ensino de resolução de problemas**, que tem por objetivo apresentar e instrumentalizar professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental, pedagogos(as) e professores que atuam em sala de Atendimento Educacional Especializados (AEE), nos dias 14 e 28 de AGOSTO de 2021, de forma presencial. Para garantir o cumprimento dos protocolos e a organização da Universidade, todas as atividades desenvolvidas ao longo do curso deverão obedecer rigorosamente a este documento, embora em funcionamento, não estamos livres da COVID-19. Por isso, sua colaboração é muito importante para que possamos atender a todos com o máximo de segurança.

A modalidade para início do curso seguirá os protocolos vigentes no momento, considerando todos os cuidados necessários para a saúde e segurança dos participantes e funcionários da Universidade e respeitando as individualidades do curso.

Pensando nos protocolos de segurança e no bem-estar coletivo, seguem as orientações que devem ser seguidas:

- O participante somente deverá participar do curso com a primeira dose da vacina contra a Covid-19.
- O participante somente deverá participar do curso se na verificação de temperatura não apresentar febre e se nenhum membro da família esteja doente ou tenha apresentado recentemente sintomas que possam ser considerados razoavelmente indicativos da possibilidade de ter contraído COVID-19.
- Higienização constante das mãos com água e sabão ou álcool em gel 70%,

disponível nos ambientes frequentados durante o curso como os banheiros e sala do Auditório da Universidade.

- Uso obrigatório de máscara durante toda a permanência na Universidade (todos devem ter uma máscara reserva para troca a cada 2 horas).
- Manter o distanciamento de 1,5m entre os participantes, estabelecido dentro das dimensões especificadas e já organizado pela equipe do curso, conforme as orientações para ocupação dos espaços da UFMT/Câmpus de Sinop, assim, para que haja uma mobilidade, serão permitidas até 22 pessoas dentro do Auditório.
- Todos deverão trazer garrafa de água para uso individual, pois os bebedouros só estarão disponíveis para reabastecimento dos recipientes.
- Seguir todas as orientações estabelecidas no protocolo que foi lido e assinado.

Estou ciente de seguir todas as normas de segurança descritas neste documento:

1____

2____

3____

4____

5____

6____

7____

8____

9____

10____

11____

12____

13____

14____

15____

16____

17____

18____

19____

20____

21____

Anexo 3: Questionário Inicial

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO (UFMT)
INSTITUTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, HUMANAS E SOCIAIS (ICNHS)
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM) - Mestrado Profissional

NICKNAME: ____
(Sugerimos como apelido nome de árvores).

1 - Formação:

( ) Licenciatura em Matemática ( ) Pedagogia ( ) Outra: ____

2 - Faixa etária (anos):

( ) 20 a 30 ( ) 31 a 40 ( ) 41 a 50 ( ) 51 a 60 ( ) acima de 60.

3 – Atua em qual turma do Ensino Fundamental atualmente?

____

4 - Descreva brevemente há quanto tempo atua como professor e em quais ciclos (anos).

____
____
____
____
____

5 – Nome da escola que trabalha atualmente e sua função.

____
____
____

6 - Você conhece o Método de Singapura ou Modelo de Barras? Se sim, em que situação o conheceu?

____
____

7 – Você usa materiais manipuláveis e/ou recursos pedagógicos em tua sala de aula de matemática? Em quais situações? Se sim, cite-os.

____

____

____

____

8 – Em tuas aulas com que frequência você trabalhar Resolução de Problemas Matemáticos com teus alunos?

____

____

____

9 – Escreva as cinco palavras que mais identificam tua experiência em trabalhar resolução de problemas com teus alunos:

____

____

____

____

10 – Qual tua expectativa em relação a este curso?

____

____

____

____

11- Escreva tuas sugestões, proposta ou observação para o curso.

____

____

____

____

____

____

____

Data ______/______/2021.

Anexo 4: Avaliação do Curso

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO (UFMT)
INSTITUTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, HUMANAS E SOCIAIS (ICNHS)
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM) - Mestrado Profissional

NICKNAME: ______________________________

AVALIAÇÃO DO CURSO

1 - Conhecer o recurso Modelo de Barras alterou sua forma de resolver problemas matemáticos? Justifique sua resposta.

2 - Após conhecer o Modelo de Barras você sentiu mais segurança para trabalhar com resolução de problemas?

3 - Qual a possiblidade de aplicar o modelo de barras em sua sala de aula? Por quê?

4 - Conte sua experiência em relação as multiestratégias e o Modelo de Barras para resolução de problemas vivenciados durante o curso da Ação Formativa.

____

____

____

5 - O curso contribuiu para você identificar mais oportunidades de usar materiais e recursos manipuláveis (Frac-Soma, Régua de Cuisenaire e Material Dourado) em tua sala de aula?

____

____

____

6 - No seu entendimento os problemas trabalhados no curso estão adequados com as prescrições da Base Nacional Comum Curricular (BNCC)? Com o currículo da tua escola?

____

____

____

6 - Em relação a resolver problemas você percebeu alguma modificação em sua postura docente ou pessoal?

____

____

____

Data ______/______/2021.

Anexo 5: Ficha de Avaliação

FICHA DE AVALIAÇÃO					
NICKNAME:					
PROBLEMA:					
ETAPA	**Habilidade**	**SIM**	**EM PARTE**	**NÃO**	**OBSERVAÇÃO**
1ª Etapa	Registrou os dados essenciais corretamente				
	Identificou o que precisa ser calculado				
2ª Etapa	Representou corretamente um Modelo de Barras usando seus dados				
	Equacionou corretamente usando algum material concreto ou recurso didático				
	Equacionou corretamente usando ou não Modelo de Barras, com seus dados				
	Equacionou o problema de outra forma				
3ª Etapa	Resolveu sem erros a equação que considerou				
4ª Etapa	Confirmou a resposta na equação				
	Interpretou a reposta dentro do enunciado do problema				
5ª Etapa	Apresentou sugestão/considerações de adequação para que o problema seja aplicado em sala de aula				
	Apresentou sugestão/disposição de aplicar o problema em sala de aula				

Anexo 6: Ficha de aprovação do produto educacional

15/05/2022 19:57 SEI/UFMT - 4517062 - Despacho

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

DESPACHO

Processo nº 23108.019353/2022-02
Interessado: STELA MARIS FERRARI STREIT

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE)[1]

Identificação:

Mestrando(a)	Stela Maris Ferrari Streit
Orientador(a)	Edson Pereira Barbosa
Coorientador(a)	
Título da Dissertação	Efeitos do Modelo de Barras nos Processos de Ensino e de Aprendizagem de Resolução de Problemas Matemático
Área de concentração	Ensino de Ciências da Natureza e Matemática
Linha de Pesquisa	Ensino de Matemática
Nome do Produto	MODELO DE BARRAS: Disparador de multiestratégias para resolução de problemas
Assinale o Tipo do Produto:	(x) PTT1 - Material didático/instrucional (x) PTT2 - Curso de formação profissional ( ) PTT3 - Tecnologia social ( ) PTT4 - Software/Aplicativo ( ) PTT5 - Evento organizado ( ) PTT6 - Relatório ( ) PTT7 - Acervo ( ) PTT8 - Produto de comunicação ( ) PTT9 - Manual/Protocolo ( ) PTT10 - Carta, mapa ou similar

AVALIAÇÃO DO PRODUTO/PROCESSO EDUCACIONAL (PE) APRESENTADO

Complexidade Compreende-se como uma propriedade do PE relacionada às etapas de elaboração, desenvolvimento e/ou validação do Produto Educacional. Obs.: Mais de um item pode ser marcado.	(x) O PE é concebido a partir da observação e/ou da prática do professor e está atrelado à questão de pesquisa da dissertação. (x) A metodologia apresenta clara e objetivamente a forma de aplicação e análise do PE. (x) Há uma reflexão sobre o PE com base nos referenciais teóricos e teórico-metodológicos empregados na respectiva dissertação. ( ) Há apontamentos sobre os limites de utilização do PE.
Impacto Considera-se a forma como o PE foi utilizado e/ou aplicado nos sistemas educacionais, culturais, de saúde ou outros.	( ) Protótipo/Piloto não utilizado no sistema relacionado à prática profissional do discente. (x) Protótipo/Piloto com aplicação no sistema educacional relacionado à prática profissional do discente.
Aplicabilidade Relaciona-se ao potencial de facilidade de acesso e compartilhamento que o PE possui, para que seja acessado e utilizado de forma integral e/ou parcial em diferentes sistemas.	( ) PE tem características de aplicabilidade a partir de protótipo/piloto, mas não foi aplicado durante a pesquisa. ( ) PE tem características de aplicabilidade a partir de protótipo/piloto e foi aplicado durante a pesquisa. (x) PE tem características de aplicabilidade, foi aplicado durante a pesquisa e tem potencial de replicabilidade. ( ) PE foi aplicado em diferentes ambientes/momentos e tem potencial de replicabilidade face à possibilidade de acesso e descrição.
Acesso Relaciona-se à forma de acesso ao PE. Obs.: Mais de um item pode ser marcado.	( ) PE sem acesso. ( ) PE com acesso via rede fechada. (x) PE com acesso público e gratuito. (x) PE com acesso público e gratuito pela página do Programa. (x) PE com acesso por Repositório institucional - nacional ou internacional - com acesso público e gratuito
Aderência Compreende-se como a origem do PE, apresenta origens nas atividades oriundas das linhas e projetos de pesquisas do PPGECM.	( ) Sem clara aderência às linhas de pesquisa ou projetos de pesquisa do PPGECM. (x) Com clara aderência às linhas de pesquisa ou projetos de pesquisa do PPGECM
Inovação Considera-se que o PE é/foi criado a partir de algo novo ou da reflexão e modificação de algo já existente revisitado de forma inovadora e original.	( ) PE de alto teor inovador (desenvolvimento com base em conhecimento inédito). (x) PE com médio teor inovador (combinação e/ou compilação de conhecimentos preestabelecidos). ( ) PE com baixo teor inovador (adaptação de conhecimento(s) existente(s).

Breve relato sobre a abrangência e/ou a replicabilidade ou outros elementos relevantes do PE:

O Produto Educacional foi elaborado para ser trabalhado com alunos do 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, contudo professores que ensinam Matemática nos anos iniciais e anos finais podem adaptá-lo conforme a necessidade da turma e/ou especificidades de seus alunos. O formato apresentado permite que o Produto Educacional seja replicável, haja vista que ele pode ser utilizado em formação de professores, salas de recursos e situações de acompanhamento pedagógico. O Produto apresenta uma sugestão de ficha avaliação na qual o professor pode registrar e acompanhar o desempenho individual do aluno e ou da turma. Além disso, ao longo do trabalho são apresentadas sugestões de materiais e recursos didáticos manipuláveis que podem complementar as discussões e soluções para cada problema. A apresentação gráfica e editorial do produto pode ser melhorada com processo de diagramação e editoração profissional.

Data da Defesa: 06/04/2022.

[1] A presente ficha foi construída a partir da proposta de ficha avaliativa apresentada em: RIZZATTI, I. M.; MENDONÇA, A. P.; MATTOS, F.; RÔÇAS, G. SILVA, M. A. B. V. da; CAVALCANTI, R. J. S.; OLIVEIRA, R. R. Os produtos e processos educacionais dos programas de pós-graduação profissionais: proposições de um grupo de colaboradores. ACTIO, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-17, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio>. Acesso em: 20 mar. 2021.

Documento assinado eletronicamente por **EDSON PEREIRA BARBOSA**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 25/04/2022, às 14:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **ELIZABETH QUIRINO DE AZEVEDO**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 25/04/2022, às 16:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Regina Ehlers Bathelt**, **Usuário Externo**, em 27/04/2022, às 08:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4517062** e o código CRC **B1A9C121**.

APÊNDICE

Apêndice 1: Produto Educacional Modelo de Barras Disparador de multiestratégias de resolução de problemas

2022

UFMT

MODELO DE BARRAS
Disparador de multiestratégias para resolução de problemas

Versão do Professor

STELA MARIS FERRARI STREIT
ORIENTADOR: PROF. DR. EDSON PEREIRA BARBOSA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA - PPGECM

STELA MARIS FERRARI STREIT
ORIENTADOR: PROF. DR. EDSON PEREIRA BARBOSA

MODELO DE BARRAS

Disparador de multiestratégias para resolução de problemas

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA – PPGECM

SINOP, MATO GROSSO

2022

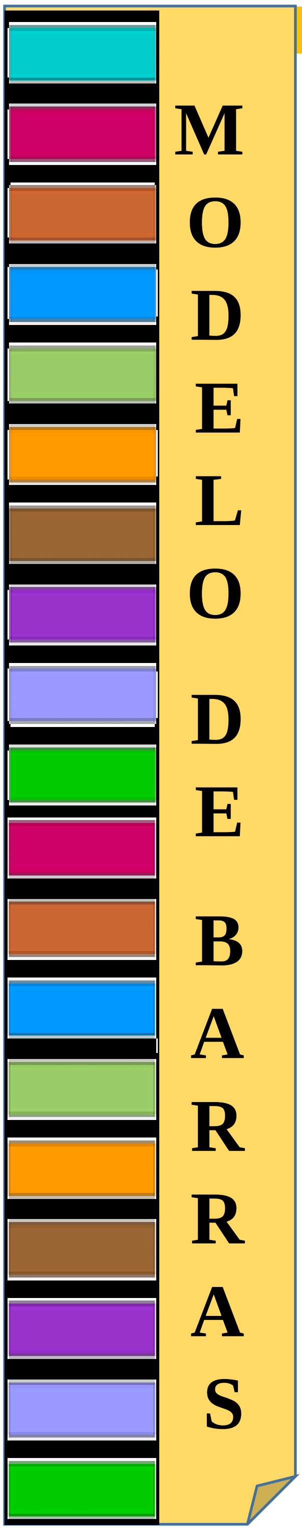
Sumário

APRESENTAÇÃO ... 6
INTRODUÇÃO ... 10
AS QUATRO OPERAÇÕES MATEMÁTICAS, FRAÇÃO E PORCENTAGEM ... 20
COLEÇÃO DE PROBLEMAS ... 23
Problema 1.1 – Sala de aula de Carlos ... 26
Sugestão: ... 26
Interpretação ... 26
Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto ... 26
Estratégia 02 – Utilizando Material Dourado ... 27
Estratégia 03 – Modelando com as Barras ... 29
Estratégia 04 - Aritmética ... 29
Estratégia 05 – Iniciação à Álgebra ... 30
Habilidades - BNCC ... 31
Problema 1.2 – Buquê de flores ... 31
Sugestão: ... 31
Interpretação: ... 31
Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto ... 31
Estratégia 02 – Utilizando Material Dourado ... 33
Estratégia 03 – Utilizando agrupamento na barra ... 33
Estratégia 04 – Modelando com as Barras ... 34
Estratégia 05 - Aritmética ... 35
Estratégia 06– Iniciação à Álgebra ... 35
Habilidades - BNCC ... 36
Problema 1.3 – Escola de Sinop-MT ... 36
Interpretação ... 36
Estratégia 01 - Modelando com as Barras ... 36
Estratégia 02 - Aritmética ... 37
Problema 1.4 – Pés de codorna e coelho ... 38
Sugestão: ... 38
Interpretação ... 38
Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto ... 39
Estratégia 02 – Suposição ... 40
Estratégia 03 – Modelando com as Barras ... 40
Estratégia 04 – Agrupamento ... 41
Problema 1.5 – Aquário ... 42
Interpretação ... 42

Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto 43
Estratégia 02 – Utilizando Material Dourado 44
Estratégia 03 – Modelando com as Barras 46
Estratégia 04 - Iniciação à Álgebra 47
Problema 2.1 – Gibis 49
Interpretação 49
Estratégia 01 – Modelando com as Barras 50
Estratégia 02 - Aritmética 50
Habilidades - BNCC 51
Problema 2.2 – Latas de tinta 52
Sugestão: 52
Interpretação 52
Estratégia 01 - Modelando com as Barras 52
Estratégia 02 - Aritmética 53
Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra 53
Habilidades - BNCC 54
Problema 2.3 – Zoológico do parque de diversões Beto Carrero World 54
Sugestão: 54
Interpretação 54
Estratégia 01 – Modelando com as Barras 55
Estratégia 02 - Aritmética 55
Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra 56
Habilidades – BNCC 57
Problema 2.4 – Alunos do 4º Ano 57
Interpretação 57
Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto 57
Estratégia 02 – Utilizando Ábaco 59
Estratégia 03 – Utilizando Material Dourado 60
Estratégia 04 – Modelando com as Barras 61
Estratégia 05 - Aritmética 62
Estratégia 06 – Iniciação à Álgebra 63
Habilidades - BNCC 63
Problema 2.5 – Jogo de cartas 64
Interpretação 64
Estratégia 01 – Modelando com as Barras 64
Estratégia 02 – Aritmética 65
Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra 65

Habilidades - BNCC ... 66
Problema 3.1 – Tanque de combustível ... 71
Sugestão: ... 71
Interpretação ... 71
Estratégia 03 – Utilizando Ábaco ... 71
Estratégia 02 - Modelando com as Barras ... 72
Estratégia 03 - Aritmética ... 73
Estratégia 04 – Iniciação à Álgebra ... 73
Habilidades - BNCC ... 73
Problema 3.2 – Livro de Fábio ... 74
Interpretação ... 74
Estratégia 01 - Modelando com as Barras ... 74
Estratégia 02 - Aritmética ... 75
Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra ... 75
Habilidades - BNCC ... 76
Problema 3.3 – Fábrica de máscaras ... 76
Interpretação ... 76
Estratégia 01 - Modelando com as Barras ... 77
Estratégia 02 - Aritmética ... 77
Problema 3.4 – Livro de Edson ... 78
Sugestão: ... 78
Interpretação ... 79
Estratégia 01 - Modelando com as Barras ... 79
Estratégia 02 - Aritmética ... 80
Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra ... 81
Habilidades - BNCC ... 81
Problema 3.5 – Cartas de Antônio e Marcos ... 81
Interpretação ... 81
Estratégia 01 - Modelando com as Barras ... 82
Estratégia 02 - Iniciação à Álgebra ... 83
Estratégia 03 - Álgebra ... 84
CONSIDERAÇÕES FINAIS ... 86
BIBLIOGRAFIA ... 88
FICHA DE AVALIAÇÃO ... 91
ENCARTES PARA RECORTAR - Bonequinhos ... 92
ENCARTES PARA RECORTAR – Rosas e Tulipas ... 93
ENCARTES PARA RECORTAR – Peixes ... 94

ENCARTES PARA RECORTAR - Codornas e Coelhos 95



APRESENTAÇÃO

Caro(a) colega Professor(a),

O livro "**MODELO DE BARRAS disparador de multiestratégias para resolução de problemas"** é um material que foi desenvolvido na pesquisa de mestrado nomeada "Efeitos do modelo de barras nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos" no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática - PPGECM, sob a orientação do professor Dr. Edson Pereira Barbosa. Este material está disponível no site do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM).

O objetivo deste material é contribuir para a ampliação dos processos de ensino e de aprendizagem de resolução dos problemas matemáticos, com a possibilidade de ser inserido junto aos materiais didáticos do professor, a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental.

A intenção deste material, caro colega Professor, não é o de aprofundar conceitos matemáticos e defini-los como prontos e acabados, e sim apresentar o recurso Modelo de Barras como um recurso didático disparador de multiestratégias, que auxilia nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas, proporcionando gradualmente a construção do conhecimento de forma significativa, sendo possível desenvolver o cálculo mental, por meio da modelagem visual.

Para elaborar o livro **MODELO DE BARRAS, disparador de multiestratégias para resolução de problemas**, pesquisas foram realizadas a fim de verificar a existência de trabalhos com esta perspectiva.

Os relatos das pesquisas podem ser lidos na íntegra, na dissertação desta autora intitulada Efeitos do Modelo de barras nos processos de ensino e de aprendizagem de resolução de problemas matemáticos.

No processo de elaboração deste livro procuramos produzir um material prático e ilustrativo, para servir de apoio ao uso do recurso modelo de barras na resolução de problemas, a fim de auxiliar os professores que ensinam Matemática, no segundo ciclo do Ensino Fundamental, da Educação Básica.

A sistematização dos problemas abordados neste livro abrange aspectos que se inter-relacionam com os processos de ensino e de aprendizagem. Logo, as diferentes estratégias pedagógicas apresentadas têm como objetivo servir ao professor, como ferramentas em sua tarefa de ensinar, visto que não são "receitas", mas sugestões de encaminhamentos, pois acreditamos que o ato de ensinar é particular a cada professor(a).

Quanto à estrutura, organizamos este livro em cinco partes, a saber: i) apresentação; ii) informação ao professor; iii) introdução, coleção de problemas para desenvolver atividades em sala de aula; iv) considerações finais e v) atividades complementares.

A coleção de problemas foi organizada conforme o tipo de problema, a saber: i) parte-todo; ii) comparação e; iii) antes-depois. Para solução de cada problema observamos as quatro etapas de Polya (2006) como uma forma eficaz de resolver problemas. São elas: i) a compreensão do problema; ii) o estabelecimento de um plano; iii) a execução do plano e: iv) a reflexão sobre a estratégia de resolução adotada. Nas soluções dos problemas consideramos o uso de materiais didáticos, como materiais concretos, em especial, o Material Dourado. Além disso, as diversas soluções de cada problema percorrem uma sugestão, abordagem Concreto-Pictórico-Abstrato (CPA).

Neste produto educacional tratamos ainda das formas de representação dos números em sistemas de numeração decimal, das quatro operações fundamentais da Matemática e em frações, enfatizando a representação com barras, comumente adotadas para resolução de problemas aritméticos.

Destacamos que a resolução de problemas é uma competência que deve ser desenvolvida de forma significativa nos processos de ensino e de aprendizagem. Então, apresentamos o Modelo de Barras como um recurso auxiliar aos professores pela sua utilidade maior, de preparar os alunos a pensar matematicamente, à construção do conhecimento e a saber interpretar problemas de forma paulatina.

Esperamos que você, caro colega Professor(a), a partir desse texto, se inspire a resolver problemas compreendendo: i) como os dados são representados nas barras e como são realizadas as operações neste modelo; ii) conhecer e aplicar multiestratégias para a solução de certos problemas; e iii) estimar, analisar e propor soluções para minimizar erros ou mesmo, quando possível, eliminá-los.

Especificamente, em relação ao erro cometido em um problema matemático, este não deve ser visto de forma a condenar totalmente a resolução do exercício, mas, tão somente, a parte inerente concernente ao erro de uma forma subjetiva.

Profa. Ma. Stela Maris Ferrari Streit

INFORMAÇÕES AO PROFESSOR

Para encontrarmos respostas a nossa questão - Quais os efeitos do Modelo de Barras na resolução de problemas matemáticos apontados pelos professores no segundo ciclo do Ensino Fundamental? – elaboramos, em colaboração com os professores que ensinam Matemática, participantes da pesquisa, uma coleção de problemas que consideramos existentes nos livros didáticos de 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, para a prática ou modo de exercer a resolução de problemas, adotando como suporte os estudos de Polya (2006), dando origem ao produto educacional à disposição, de todos os interessados no Modelo de Barras.

O livro está organizado em 3 (três) blocos conforme os tipos de problemas matemáticos, compostos por 5 (cinco) problemas cada, onde são descritos passo a passo, de acordo com as etapas de Polya (2006).

Além disso, aborda situações-problemas, permitindo a aplicação do Modelo de Barras, juntamente a realização de exercícios, trabalhando fundamentalmente conteúdos procedimentais (uso dos algoritmos), conteúdos conceituais (compreensão dos conceitos), bem como atitudinais (diálogos entre alunos e professor).

Em cada um dos 5 (cinco) problemas de cada bloco, procuramos apresentar diferentes abordagens a fim de resolver e ensinar suas resoluções. Além do Modelo de Barras, pontuamos situações em que os problemas podem ser resolvidos utilizando o Material Dourado, Ábaco ou outro recurso pedagógico.

Professor, antecipando seu possível questionamento sobre como avaliar o aprendizado construído pelo estudante, após contato com o Modelo de Barras, elaboramos uma **Ficha Avaliativa** que se encontra no final deste livro, nela podemos registrar os efeitos do uso do recurso Modelo de Barras em sua sala de aula, ficando a seu critério modificá-la.

INTRODUÇÃO

Ensinar Matemática, de modo que os alunos aprendam, não é tarefa fácil!

Então, caro colega Professor(a), convido-te a ampliar seu repertório por meio desta singela obra, pensada e elaborada com esmero, como forma também de comunicarmos, mesmo informalmente.

Para que se compreenda melhor esse processo, faz-se necessário considerar a relevância em aprender Matemática por meio do Modelo de Barras para resolver problemas, consistindo um recurso pedagógico versátil e ao mesmo tempo prazeroso, acabando por desmistificar a monstruosidade detrás da Matemática, possibilitando o aprendizado matemático por um caminho simples sem complexidade.

Das competências da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o procedimento que toma destaque é a **resolução de problemas,** devido sua abordagem metodológica para o ensino da Matemática, uma vez que, no ambiente da sala de aula desenvolvem-se habilidades essenciais para o futuro dos estudantes.

Este material permite experimentos a partir do recurso Modelo de Barras com a prática de resolver problemas da Matemática Escolar, permitindo ao professor o planejamento e o desenvolvimento da aula de modo a fomentar nos seus alunos a curiosidade, imaginação, criatividade, argumentação e a participação nas aulas, fazendo-os sujeitos ativos e protagonistas nos processos de aprendizagem.

A escolha do Material Dourado, como principal apoio utilizado nas propostas de soluções dos problemas deste produto educacional, apresenta-se como recurso concreto e manipulativo para a compreensão do Sistema Numeração Decimal (SND), ressalvando sua adequação para a utilização, em conjunto, com o restante dos materiais pedagógicos.

A Matemática é um componente curricular considerado abstrato. Assim, o Material Dourado tem o potencial de possibilitar aos alunos, melhor compreensão da aritmética, operações, trocas e agrupamentos matemáticos.

Aprender Matemática demanda amadurecimento cognitivo e prática, por isso alguns componentes são essenciais para o desenvolvimento das habilidades (cálculo, manipulação algébrica, visualização espacial, análise de dados, medidas, uso das ferramentas matemáticas e a estimação) necessárias para a solução dos problemas matemáticos.

O recurso Modelo de Barras concentra no desenvolvimento de compreensão dos conceitos (numéricos, algébricos, geométricos, estatísticos, probabilísticos e analíticos) antes de ensinar os procedimentos (raciocínio, comunicação e às conexões, habilidades de pensamento, heurística, aplicações e à determinação de estratégias pedagógicas para a solução dos problemas), utilizando tanto uma abordagem visual e prática, combinação esta que enfatiza melhor entendimento dos números, fortalecendo a solução de problemas.

Assim, são trabalhadas as atitudes como o respeito às crenças, ao interesse, à apreciação, à confiança e à perseverança, de modo que seja possível também o monitoramento dos pensamentos e controle do aprendizado, isto é, à metacognição.

ABORDAGENS CONSIDERADAS

Neste tópico, apresentamos abordagens relativas a resolução de problemas, etapas de Polya para resolver problemas, Modelo de Barras no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática e abordagem “concreta - pictórica – abstrata” (CPA).

Resolução de problemas

Um problema matemático é definido como tal não por sua forma, e sim por sua relação com o nível de conhecimento que o aluno pensa sobre ele, embora uma mesma proposta possa ser um problema para um aluno e não ser para outro.

O problema precisa desafiar os alunos de modo que a resposta não esteja automatizada, sendo necessário investigar possibilidades não aparentes para chegar às soluções. Para tanto, no tocante aos alunos, é preciso recursos suficientes para criar uma solução.

A resolução de problemas está inteiramente ligada à diferença entre apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses, sendo que o uso do recurso Modelo de Barras o aluno consegue fazer uma produção heurística, podendo ser inventor e, ao mesmo tempo, descobridor de respostas findadas de forma autônoma e criativa.

Assim, em um problema das partes de um todo, o aluno será induzido a perceber que se trata de operações com frações, sendo o Modelo de Barras responsável pela visualização dos dados do problema, estando desta forma apto a utilizar sua criatividade para a resolução.

Etapas de Polya para resolver problemas

Em particular, Polya (2006) ao se deparar com as especificidades dos alunos, estes apresentando uma proficiência consideravelmente insatisfatória, tomou como iniciativa criar etapas para resolver problema matemáticos.

De acordo com Polya (2006), seguir as etapas é extremamente importante, pois cada uma tem papel contínuo para a visualização e conexão da estrutura dos dados enunciados no problema. Tal procedimento levará o aluno a ter maiores chances de caminhar rumo ao acerto, estimulando-o a solucionar problemas mais desafiadores.

As 4 (quatro) etapas na resolução de um problema são as seguintes: i) compreensão do problema; ii) estabelecer um plano; iii) execução do plano e iv) retrospecto - reflexão sobre a estratégia de resolução adotada.

Para facilitar o entendimento de cada etapa, foi elaborado o seguinte quadro:

Quadro 1. As quatro etapas de Polya para a resolução de problemas.

Compreensão do Problema	Estabelecer um Plano	Execução do Plano	Retrospecto
Ler o problema com clareza, procurando compreender a situação-problema e desejar resolvê-la.	Buscar por uma estratégia que leve à solução do problema.	Colocar em prática seu plano justificando sua(s) estratégia(s).	Verificar erros em cada passo que foi utilizado como de cálculos e da escolha estratégica.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

A importância de cada uma destas etapas mostra-se relevante. Assim, não basta, por exemplo, um aluno obter resultado matemático correto, mas sem conhecer sua interpretação racional.

Modelo de barras nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática

O Modelo de Barras é um recurso para representar graficamente os dados enunciados no problema vinculado à representação pictórica similar das atividades de manipulação de materiais pedagógicos.

A modelagem acontece por meio das barras, ajudando o aluno entender a relação entre os dados numéricos do problema e esquematização da representação visual, de modo que facilita a operacionalização do exercício, a fim de que ele possa resolvê-lo ao seu modo.

Por possuir estrutura lógica e conexa, o Modelo de Barras dirige ao desenvolvimento das habilidades propostas pela BNCC (BRASIL, 2017) de forma gradativa, promovendo a construção do conhecimento e aprendizagem significativa.

O Modelo de Barras transige “aprender a aprender”, se estudado e adaptado em sua essência, pois ajuda o aluno na construção de seus pensamentos aritméticos e no desenrolar da transição para a álgebra, uma vez ser uma estratégia que ensina por meio de processo da apreensão perceptiva, visando à visualização, raciocínio e construção.

A abordagem CPA

No período escolar do segundo ciclo (4º, 5º e 6° anos) do Ensino Fundamental é proposto a consolidação do uso de soluções aritméticas e inicia passagem para a álgebra. No entanto, é comum em escolas brasileiras, nos depararmos com situações em que os alunos ainda precisam se apoiar em materiais manipuláveis (concretos) para resolver problemas ou realizar operações.

O desafio do professor ao ensinar matemática reside em como ensinar um aluno tecnológico a fim de prepará-lo para atuar de forma consciente e autônoma na sociedade.

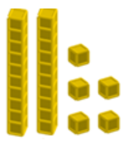
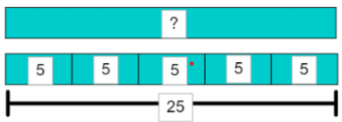
Atualmente, os motivos para ensinar matemática estão nas necessidades práticas de entender e utilizar com proveito as tecnologias modernas, atuar de forma plena no campo do trabalho e nas inúmeras situações do cotidiano, tornando um constante equilíbrio entre a Matemática Formativa e a Matemática Informativa; a primeira mutável, referente a estruturação do pensamento, raciocínio dedutivo e a segunda estável, utilizada em tarefas específicas, voltada para o lado laboral.

O objetivo da abordagem CPA é proporcionar ao aluno a capacidade de resolução de problemas matemáticos com agilidade, "explorando a sua própria forma de pensar, em vez do pensar mecânico, por receita ou memorização" (CABRAL, 2015, p. 2).

O Modelo de Barras integra uma abordagem CPA, pois este procedimento estabelece um estreitamento de lacunas entre o modo de pensar e o de resolver problemas da matemática escolar.

O quadro a seguir elucida melhor entendimento da abordagem CPA:

Quadro 2. Abordagem CPA

Concreto	Pictórico	Abstrato
 ou 		$5 \, x \, 5 = 25$
Materiais manipuláveis ou objetos como florzinhas, carrinhos, bolinhas, bonequinhos, tampinhas, bem como material pedagógico: Ábacos e Material Dourado.	Interpretação e Modelagem do problema por meio da representação com as barras.	Operações matemáticas

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

O uso das tecnologias no ambiente escolar é extremamente eficaz, pois desenvolvem "potencialidades e ao mesmo tempo exercitam o pensamento crítico e a cidadania" (DA SILVA; ANDRADE, 2014, p. 147) dos estudantes, sendo seu uso condizente à realidade destes, uma vez que esse tipo de ferramenta possui abordagem versátil e produtiva, promove no estudante estratégias variadas de resolução e diferentes formas de aprender matemática.

Assim, decidimos investigar o Modelo de Barras em recursos tecnológicos que apoiam o seu uso, destacando o "Thinking Blocks", disponível em https://www.mathplayground.com/thinking_blocks_modeling_tool/index.html.

O aplicativo pode funcionar em sala de aula de muitas maneiras. Os alunos podem usar o *Thinking Blocks* a qualquer momento, de qualquer dispositivo, como computador, celular ou tablet.

De outra forma, o aplicativo proporciona aos alunos trabalhar em seu próprio ritmo, conhecendo melhor seu aprendizado. Usam experiências de aprendizado baseadas em descobertas. E essas experiências aprofundam, exercitam e enriquecem sua compreensão. Eles recorrem ao seu próprio conhecimento, encontram situações inesperadas, descobrem padrões de respostas, "depuram" erros, adaptam suas estratégias para resolver os problemas e generalizam novos princípios que são transferidos para as novas situações.

SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL (NÚMEROS E OPERAÇÕES)

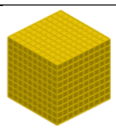
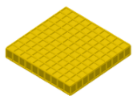
O sistema de numeração decimal recebe esse nome porque usamos a contagem de dez em dez e, também, por seguir o princípio do valor posicional do algarismo, isto é, cada algarismo tem um valor de acordo com a posição que ocupa na representação do número.

Material Dourado

Para propiciar o entendimento dos agrupamentos na base dez, do sistema de numeração decimal, diversas atividades sugerem o uso do Material Dourado, do ábaco e de representações com notas e moedas do Sistema Monetário Brasileiro. Seria interessante que tais atividades pudessem ser realizadas com os alunos manipulando esses materiais, de modo a vivenciarem as situações propostas.

O Material Dourado possibilita que o aluno explore a composição e decomposição de números naturais, bem como auxilia o trabalho com agrupamentos e trocas, necessário para que o aluno incorpore a noção que o nosso sistema de numeração é decimal, aditivo e multiplicativo.

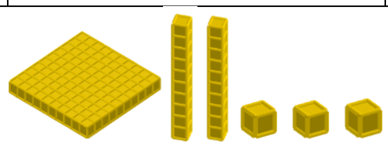
Quadro 3. Representação do Material Dourado.

Cubo	**Placa**	**Barra**	**Cubinho**
Mil unidades	**100 unidades**	**10 unidades**	**1 unidade**
			

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Observe a representação do número 123 pelo Material Dourado.

Quadro 4. Representação do número 123 no Material Dourado

Placas	**Barras**	**Cubinhos**
1	**2**	**3**
		
C	**D**	**U**
1	**2**	**3**
Forma decomposta: 100 + 20 + 3	**Escrita por extenso:** Cento e vinte e três	

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Ordens e Classes

No sistema de numeração decimal, com apenas dez símbolos diferentes é possível escrever qualquer número que se queira. Esse sistema de numeração, além de ser decimal, também é posicional. O valor do algarismo muda dependendo da posição que ele ocupa no número.

Por exemplo, no número 4321, o algarismo 4 indica 4000, mas no número 3421 o algarismo 4 indica 400.

O ábaco de hastes é um recurso que pode ser utilizado para representar unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar. A partir dele fica mais fácil de visualizar as posições e ordens dos algarismos no Sistema de Numeração Decimal.

Cada pino do ábaco de hastes representa uma ordem do Sistema de Numeração Decimal. A quantidade de argolas coloridas em cada haste representa o valor da ordem. Três ordens formam uma classe.

Para visualizar melhor as classes e ordens, utilizamos o quadro de ordens. Observe o número 4321 no quadro de ordens.

Quadro 2. Classes e Ordens.

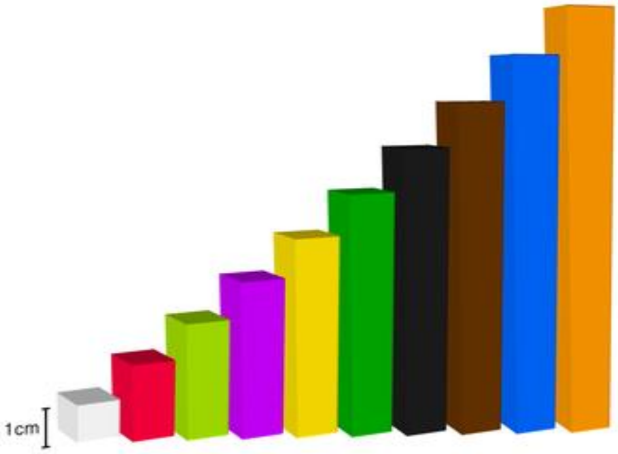
3ª classe dos Milhões			2ª classe dos Milhares			1ª classe Simples		
9ª ord.	8ª ord.	7ª ord.	6ª ord.	5ª ord.	4ª ord.	3ª ord.	2ª ord.	1ª ord.
CM	DM	UM	CM	DM	UM	Centenas	Dezenas	Unidades
					4	3	2	1

Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Os materiais pedagógicos, acompanhados de procedimentos, alicerçados em questionamentos, constituem as situações de aprendizagem. Desta forma, trouxemos outro exemplo de recurso pedagógico que possibilita ao aluno o uso da imaginação e a sua criatividade. A Escala de Cuisenaire, também promove o desenvolvimento da oralidade e de seus registros escritos, na construção dos conceitos de linguagem e da simbologia matemática, isto é, permite ler as ordens realizadas pelos alunos.

A Escala de Cuisenaire é formada por barras de 10 tamanhos diferentes, sendo que cada tamanho possui uma cor específica.

Figura 1. Escala Cuisenaire.



Fonte: http://proletramentomatematicapocosdecaldas.blogspot.com/p/material-cuisenaire-um-pouco-de.html.

Existe uma relação entre o comprimento da barra, a cor e o Número Natural, conforme mostra o quadro a seguir:

Quadro 3: Relação entre o comprimento da barra, cor e o número natural.

Comprimento	Cor	Número Natural
1 cm	branco ou cor de madeira	1
2 cm	vermelho	2
3 cm	verde-claro	3
4 cm	lilás	4
5 cm	amarelo	5
6 cm	verde-escuro	6
7 cm	preto	7
8 cm	marrom	8
9 cm	azul	9
10 cm	laranja	10

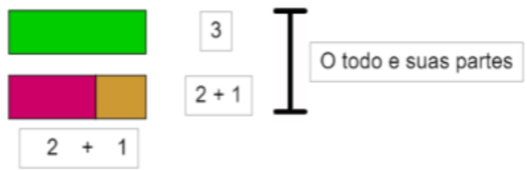
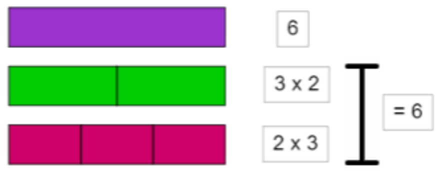
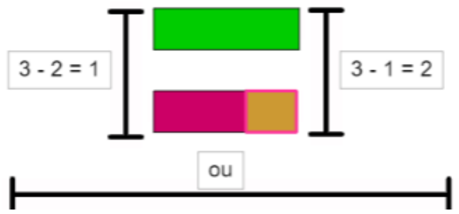
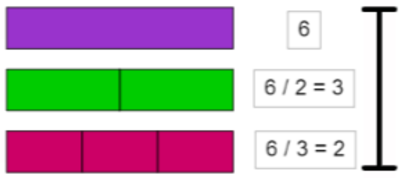
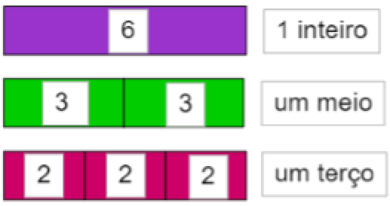
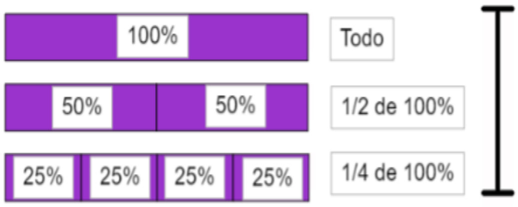
Fonte: Elaborado pela pesquisadora.

Usado adequadamente, o material possibilita que o aluno compreenda a relação número-quantidade; a noção de mais um na sequência numérica e dos números até dez; os conceitos antes de, depois de, estar entre, maior que, menor que, antecessor de, sucessor de; as operações, em especial, da composição aditiva dos números até dez. Ela possibilita também que o aluno vivencie experiências de medida de comprimento e área, múltiplos e divisores e frações.

A seguir, foi elaborado um quadro usando a Escala de Cuisenaire e o modelo de barras para representar as operações matemáticas: Adição, Subtração, Multiplicação, Divisão e Fração.

AS QUATRO OPERAÇÕES MATEMÁTICAS, FRAÇÃO E PORCENTAGEM

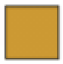
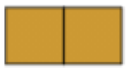
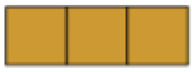
Quadro 4: Escala de Cuisenaire e o modelo de barras para representar as operações matemáticas: Adição, Subtração, Multiplicação, Divisão e Fração.

<table>
<tr><th>ADIÇÃO</th><th>MULTIPLICAÇÃO</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><th>SUBTRAÇÃO</th><th>DIVISÃO</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><th>FRAÇÃO</th><th>PORCENTAGEM</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: elaborada pela autora.

Expressões

Quadro 5: Expressões.

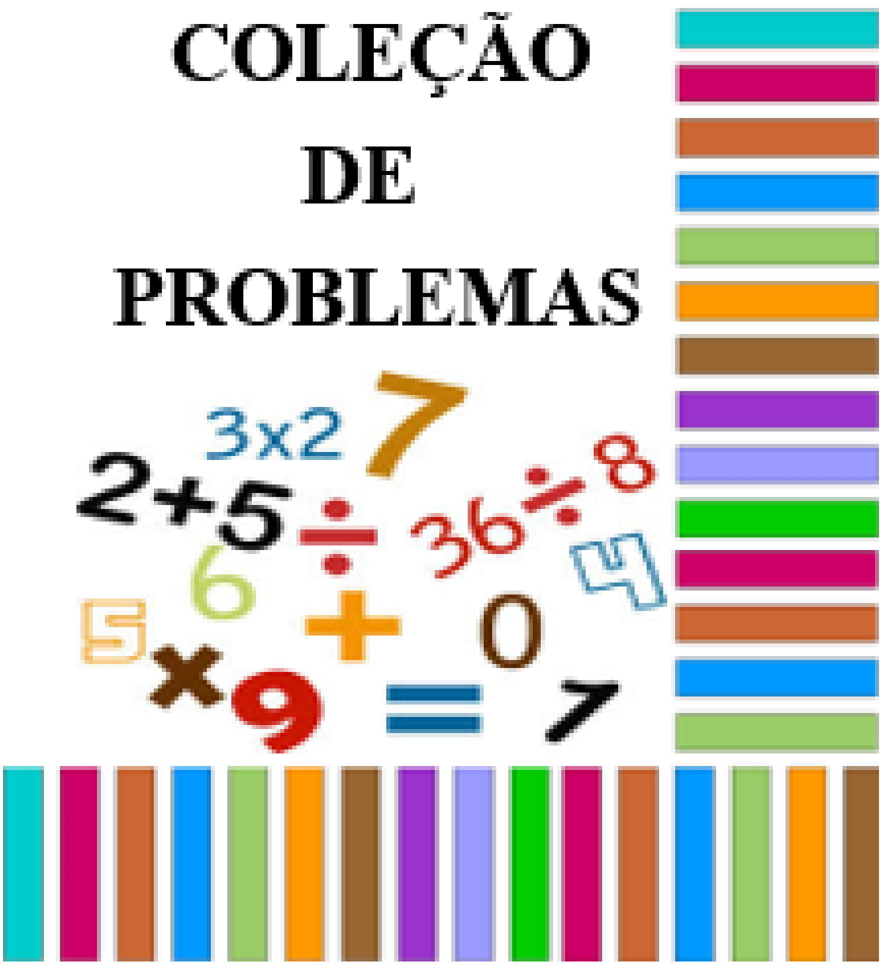
Expressões algébricas	Representação Pictórica	Escrita algébrica
Um número		1.n = n
O dobro de um número		2.n = 2n
O triplo de um número		3.n = 3n
A metade de um número		$\frac{1}{2}.n = \frac{n}{2}$
A quinta parte de um número		$\frac{1}{5}.n = \frac{n}{5}$

Fonte: elaborada pela autora.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: HABILIDADES DA BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

4º ano
(EF04MA03) Resolver e elaborar problemas com números naturais envolvendo adição e subtração, utilizando estratégias diversas, como cálculo, cálculo mental e algoritmos, além de fazer estimativas do resultado.
(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.
(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
(EF04MA07) Resolver e elaborar problemas de divisão cujo divisor tenha no máximo dois algarismos, envolvendo os significados de repartição equitativa e de medida, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
5º ano
(EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.
(EF05MA11) Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
(EF05MA13) Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.
6º ano
(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 18 set. 2021.


COLEÇÃO
DE
PROBLEMAS

BLOCO I

Coleção de problemas tipo parte-todo

Problema 1.1 – Sala de aula de Carlos 26
Problema 1.2 – Buquê de flores 31
Problema 1.3 – Escola de Sinop-MT.. 36
Problema 1.4 – Pés de codorna e coelho..39
Problema 1.5 – Aquário.. 42

BLOCO II

Coleção de problemas tipo comparação

Problema 2.1 – Gibis 49
Problema 2.2 – Latas de tinta 52
Problema 2.3 – Zoológico do parque de diversões Beto Carrero World........................ 54
Problema 2.4 – Alunos do 4º Ano 57
Problema 2.5 – Jogo de cartas 64

BLOCO III

Coleção de problemas tipo antes-depois

Problema 3.1 – Tanque de combustível.. 71
Problema 3.2 – Livro de Fábio 74
Problema 3.3 – Fábrica de máscaras 76
Problema 3.4 – Livro de Edson 78
Problema 3.5 – Cartas de Antônio e Marcos 81

PROBLEMAS PARTE-TODO

BLOCO I

Caro(a) colega Professor(a),

Neste bloco com a apresentação de uma coleção de problemas tipo parte-todo a fim de desenvolver atividades em sala de aula referentes ao Modelo de Barras como recurso pedagógico na resolução de problemas matemáticos.

Além disso, uma breve visão sobre outras estratégias pedagógicas, uso de material concreto, material dourado, aritmética e iniciação a álgebra por exemplo, destacando, de modo geral, os conteúdos que serão abordados conforme problemas tipo parte-todo, procurando mostrar a importância dessa ferramenta para a resolução de diversos problemas matemáticos.

Trataremos ainda das formas de representação dos números em sistemas de numeração decimal, nas quatro operações fundamentais da matemática e em frações, enfatizando a representação com barras, comumente adotada para resolução de problemas aritméticos.

Uma das características importantes das relações numéricas é a das partes com um todo. “O problema das relações entre as partes e o todo leva a considerações não estritamente aritméticas, mas também algébricas” (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 67).

A relação parte-todo indica certo número de partes iguais que se compõem um todo. A noção de todo é o centro para uma boa compreensão do conceito de fração e traz em si associada a ideia fundamental de representação. A vantagem de trabalhar inicialmente com a ideia de todo é que torna mais empírico e quando tomamos o todo já começamos certa abstração.

Problema 1.1 – Sala de aula de Carlos

Na sala de aula de Carlos, dois quintos dos alunos são meninos. Há 12 meninos na sala. Quantas meninas há na sala de aula? Quantos alunos há na sala de aula?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), nesta situação-problema buscamos interferir no ritmo dos alunos, assim trouxemos estratégias significativas, a fim de estimular o exercício

Lembre-se:

Exercícios mentais melhoram a capacidade de atenção, memória, linguagem e raciocínio.

Interpretação

Sujeito: meninos e meninas

Dados numéricos:

Representamos os dois quintos dos alunos, que são meninos, pela seguinte fração $\frac{2}{5}$

Há 12 meninos na sala

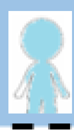
Incógnita: Quantas meninas há na sala?

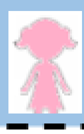
Pergunta: Quantos alunos há na sala?

Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto

Pensando em interferir no ritmo dos alunos, especialmente na motivação destes, trouxemos uma solução que dê ao aluno uma significativa aprendizagem, fazendo atividade mental, e não somente a manipulativa por meio do material concreto, bonequinhos.

No final deste livro há o encarte com as figuras ampliadas para impressão, recorte e manuseio.

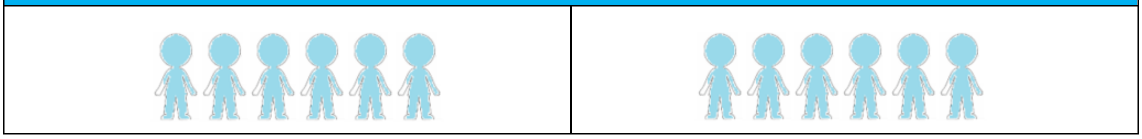




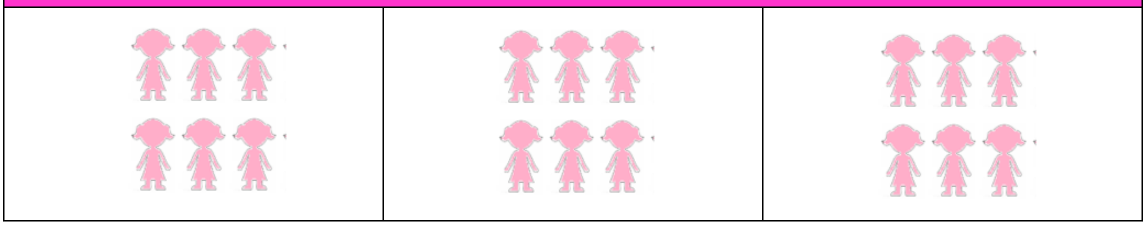
Veja a seguir.

Meninos	Meninas
	

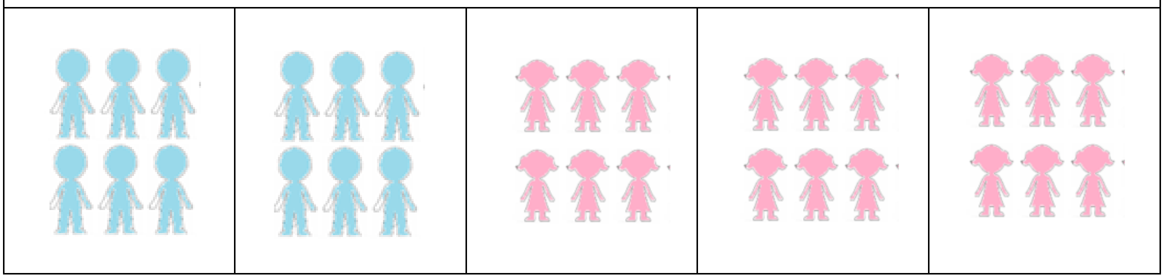
Sabemos que na sala de aula de Carlos tem 12 meninos, representados por $\frac{2}{5}$ dos alunos.

12 meninos


Sendo o restante meninas representadas por $\frac{3}{5}$ da sala de aula. Para encontrarmos o valor podemos estruturar o pensamento da seguinte maneira, se metade de 12 é 6, logo as três partes restantes representam 18, ou seja, o total de meninas.

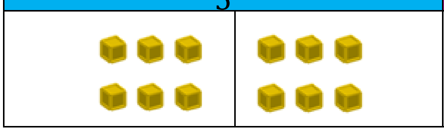
18 meninas


Portanto, o total de alunos que há na sala de aula é a soma dos meninos e das meninas, isto é, 12 somado a 18, é igual a 30 alunos.

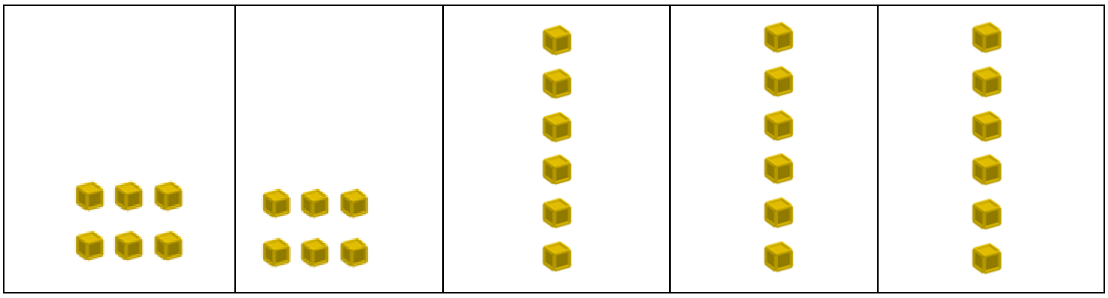
12 meninos + 18 meninas = 30 alunos


Estratégia 02 – Utilizando Material Dourado

Sabemos que na sala há 12 meninos, que são $\frac{2}{5}$ do total de alunos. Representando a sala em 5 partes, restam $\frac{3}{5}$ que correspondem às meninas.

$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
	**?**

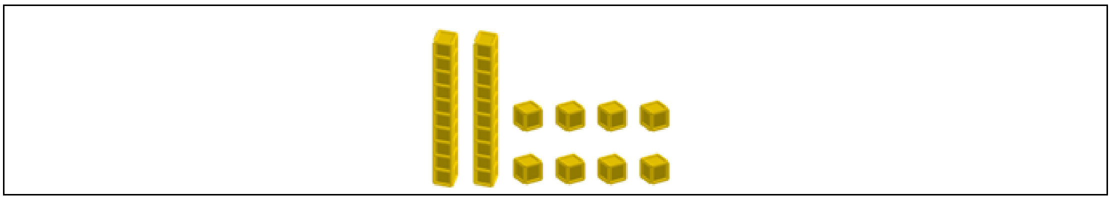
Se considerarmos que 2 partes equivalem a 12 (cubinhos), então cada parte equivale a 6 (cubinhos).



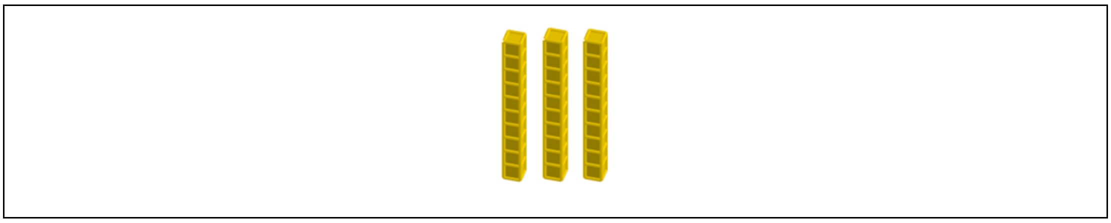
Logo, as 3 partes restantes equivalem a 18 (cubinhos), pois somamos 6 (cubinhos) + 6 (cubinhos) + 6 (cubinhos).

Assim, podemos representar a quantidade de meninos (12 cubinhos) e meninas (18 cubinhos) fazendo uma troca pelas barras, quando der uma dezena.

Como dissemos, agrupamos a quantidade de meninos (1 barra e 2 cubinhos) e de meninas (1 barra e 8 cubinhos), para obtemos o total de alunos na sala de Carlos.



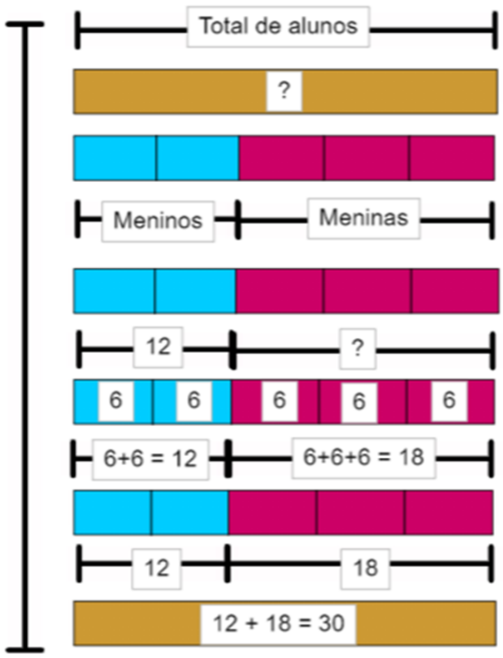
Desse modo, como há 10 cubinhos, podemos substituí-los por mais 1 barra, totalizando 3, veja a seguir:



Por fim, ao invés de termos uma representação com 30 (cubinhos), podemos minimizá-los por 3 peças, as barras, que representam as dezenas do material dourado.

Estratégia 03 – Modelando com as Barras

Para modelarmos com as barras, primeiramente é preciso representar o todo, isto é, total de alunos da sala de aula de Carlos. Em seguida, dividimos o todo em cinco partes, pois são dois quintos os meninos e sabemos que o restante são as meninas. Ao representarmos a sala em 5 partes, temos que cada parte equivale a 6, uma vez que as duas partes equivalem a 12, ou seja, as partes destacadas de azul equivalem aos 12 meninos, como são três partes restantes temos 18 meninas, conforme modeladas as partes nas barras abaixo.



Estratégia 04 - Aritmética

Sabemos que na sala de aula de Carlos $\frac{2}{5}$ do total de alunos são meninos e que são 12. Representando a sala em 5 partes, temos 6 unidades para cada parte, uma vez que 12 dividido por 2 equivale a 6.

Logo podemos dizer que os $\frac{3}{5}$ restantes da sala correspondente ao total de meninas. Como cada parte é 6, temos 18 meninas, o qual pode ser resolvido de duas formas: $3\,x\,6 \;=\; 18\; ou\; 6 + 6 + 6 \;=\; 18$.

$\frac{12}{2} = 6$	$6 \, x \, 3 = 18$	$12 + 18 = 30$

Assim, somando a quantidade de meninos que são 12 e a quantidade de meninas que são 18, obtemos o total de 30 alunos, na sala de Carlos.

Estratégia 05 – Iniciação à Álgebra

É possível propor também uma solução que use o valor desconhecido. Pois dependendo do aluno e dos professores isso poderá servir de motivação para evidenciar que o problema pode ser resolvido de forma geral pela seguinte equação.

$$12 + \frac{3}{5}x = x$$

$$12 + \frac{3}{5}x - x = 0$$

$$\cancel{5}.(12 + \frac{3}{\cancel{5}}x - x) = 0$$

$$60 + 3.x - 5.x = 0$$

$$+3.x - 5.x = -60$$

$$(-1).2.x = -60.(-1)$$

$$x = \frac{60}{2}$$

$$x = 30$$

Por meio dessa equação algébrica encontramos o total de alunos da sala de aula. Agora, podemos resolver o problema diminuindo do total de alunos a quantidade de meninos e encontraremos a quantidade de meninas, veja:

Total de alunos = Meninos – Meninas

$$30 = 12 - Meninas$$

$$Meninas = 30 - 12$$

$$Meninas = 18$$

Portanto, na sala de aula de Carlos há 12 meninos e 18 meninas.

Sugestões para resposta:

1) Há 18 meninas na sala de Carlos e no total há 30 alunos.

2) Há 30 alunos na sala de Carlos, sendo 12 meninos e 18 meninas.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF05MA13), (EF06MA09), (EF06MA10).**

Problema 1.2 – Buquê de flores

Mônica fez um buquê com 24 flores, $\frac{1}{3}$ são rosas e o resto são tulipas. Qual a quantidade de rosas e quantidade tulipas que Mônica colocou no buquê?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), neste problema é interessante apresentar aos estudantes que o **todo,** ou seja, o buquê foi dividido em três partes.

Lembre-se:

Poucos estudantes sabem que o ponto (**.**) representa o símbolo da multiplicação.

Interpretação:

Sujeitos: Rosas e Tulipas

Dados numéricos:

buquê com 24 flores

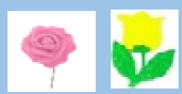
$\frac{1}{3}$ são rosas

resto são tulipas

Incógnita: Tulipas.

Pergunta: Qual a quantidade de rosas e quantidade tulipas que Mônica colocou no buquê?

No final deste livro há o encarte com as figuras ampliadas para impressão, recorte e manuseio.



Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto

Para esta solução a atividade mental foi desenvolvida manipulando o material concreto florzinha, veja a seguir.

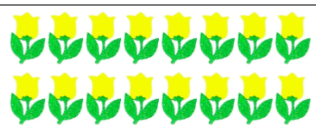
Buquê com 24 flores	
Rosas	Tulipas
	

Sabemos que no buquê $\frac{1}{3}$ são rosas, assim podemos decompor 24 em três parcelas iguais, veja a seguir.

24 flores		
$\frac{1}{3}$ são rosas	$\frac{2}{3}$ são tulipas	
8	8	8
8	16	

Sendo o restante tulipas representadas por $\frac{2}{3}$ do buquê. Para encontrarmos o valor podemos estruturar o pensamento da seguinte maneira, 24 distribui para 3, logo cada parte equivale a 8. Assim, temos 8 rosas e 16 tulipas.

8 rosas

16 tulipas


Portanto, juntando a quantidade de rosas e a quantidade de tulipas obtêm se a quantidades de flores do buquê.

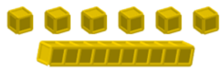
Buquê 8 rosas + 16 tulipas = 24 flores


Estratégia 02 – Utilizando Material Dourado

O total de flores do buquê são 24 flores, podemos representar as rosas e as tulipas em cubinhos.

24 unidades

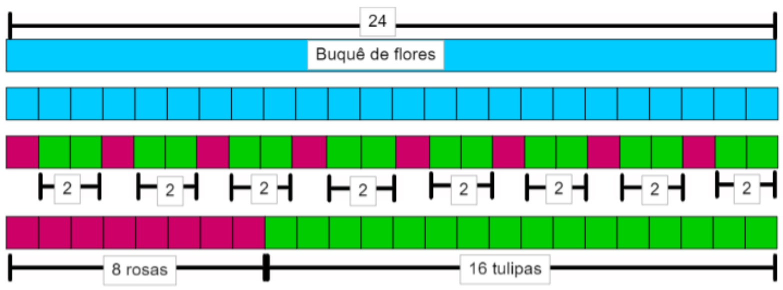

Sabemos que são $\frac{1}{3}$ das flores são rosas, de modo a distribuirmos as 24 unidades em três partes iguais.

<table>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>8</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{3}$</td><td colspan="2">$\frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="2">16</td></tr>
</table>

Se considerarmos que cada parte equivale a 8 unidades, então $\frac{1}{3}$ corresponde a quantidade das rosas e $\frac{2}{3}$ a quantidade das tulipas. Portanto, 8 (cubinhos) correspondem às rosas e 16 (1 barra e 6 cubinhos) às tulipas.

Estratégia 03 – Utilizando agrupamento na barra

Esta estratégia se dá por meio do agrupamento em que o total de flores do buquê são 24 flores representadas em uma barra na horizontal.

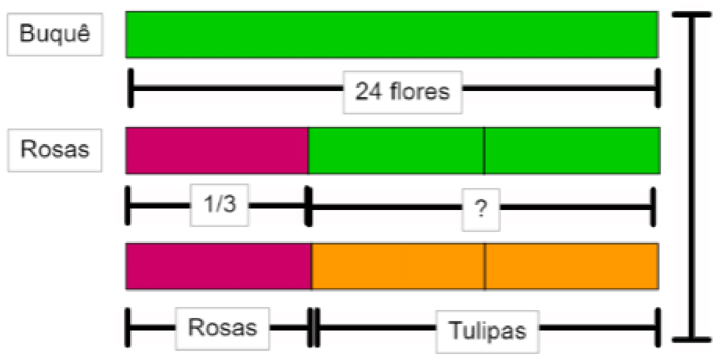


Observe que a barra foi dividida em 24 partes, sendo que vermelha representa a quantidade de rosas e verde a quantidade de tulipas. Repare que para identificar ou conhecer as quantidades de rosas (1/3) e de tulipas (2/3) o procedimento foi a cada três um terço, foi pintado de vermelho (representando as rosas) e dois, correspondente a dois terços, de verde (representando as tulipas). Assim, ao agrupar temos cor vermelha e cor verde. Logo pela contagem teremos 8 rosas e 16 tulipas, totalizando o buquê.

Estratégia 04 – Modelando com as Barras

Neste problema, modelando a partir das barras, temos que a barra inteira, cor verde, representa o buquê, isto é, as 24 flores. Na segunda barra, o $\frac{1}{3}$ representa as rosas, uma vez que a barra inteira foi dividida em três (3) partes iguais.

Diante disso, fica claro que o restante $\frac{2}{3}$ correspondem ao restante das flores, às tulipas. Veja:



Portanto, como o total de flores é 24 e o buquê foi dividido em três partes iguais, entendemos que $\frac{1}{3}$ representando as rosas equivale a oito (8), e o restante $\frac{2}{3}$ correspondente às tulipas equivale a 16.

Estratégia 05 - Aritmética

Considerando que o buquê tem 24 flores e $\mathbf{\frac{1}{3}}$ destas são rosas, o problema poderá ser resolvido de forma geral pela seguinte equação.

$$Rosas \ = \frac{1}{3} \ de \ 24 \ flores$$

Para o sujeito rosas usamos como incógnita a letra R, para facilitar o entendimento da equação, observe:

$$R \ = \frac{1}{3} \times 24 = \frac{24}{3} = \ 8$$

Assim, encontramos a quantidade de 8 rosas. Agora, ficou fácil de encontrar a quantidade de tulipas do buquê de Mônica, precisamos diminuir 8, do total 24, veja:

$$24 - 8 = 16$$

Logo, temos que a quantidade de tulipas no buquê é de 16.

Estratégia 06– Iniciação à Álgebra

Considerando que o buquê tem 24 flores e $\mathbf{\frac{1}{3}}$ destas são rosas, o problema poderá ser resolvido de forma geral pela seguinte equação.

$$Rosas \ = \frac{1}{3} \ de \ 24 \ flores$$

Para o sujeito rosas, usamos como incógnita a letra R e para Tulipas a letra T facilitando o entendimento da equação, observe:

$$Buquê = Rosas + Tulipas$$

$$24 = 8 + T$$

$$24 - 8 = 8 - 8 + T$$

$$16 = T$$

$$T = 16$$

Assim, encontramos a quantidade de rosas (8) e tulipas (16) utilizando incógnitas na equação. Como forma de tirar a prova real, somamos os dois valores encontrados de R e T totalizando a quantidade de flores do buquê, veja:

$$Buquê = Rosas + Tulipas$$
$$24 = 8 + 16$$
$$24 = 24$$

Sugestões para resposta:

1) O buquê de Mônica tem 8 rosas e 16 tulipas no total.

2) Tem 24 flores no buquê de Mônica, sendo 8 rosas e 16 tulipas.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF05MA13), (EF06MA09), (EF06MA10).**

Problema 1.3 – Escola de Sinop-MT

Numa escola de Sinop-MT, três quintos dos estudantes são meninas. Sabe-se que nesta escola existem 750 meninas. Quantos alunos tem a escola no total?

Interpretação

Sujeitos: Alunos e meninas

Dados numéricos:

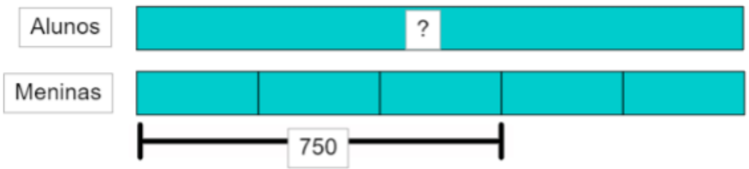
Três quintos dos estudantes são meninas.

750 meninas.

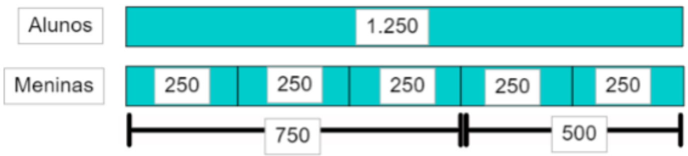
Incógnita: Quantos alunos tem a escola no total?

Estratégia 01 - Modelando com as Barras

Neste problema, modelando a partir das barras, verificamos que o todo são os alunos da escola e, três quintos correspondem a 750 meninas, veja:



Observe que a partir da representação das meninas o todo foi dividido em cinco partes iguais, assim como três partes correspondem a 750, então, cada uma das partes é equivalente a 250. Veja:



Portanto, para encontrarmos o total de alunos da escola, basta somarmos o total de meninas 750 mais as duas partes restantes 500, ou seja, a escola tem 1.250 alunos.

Estratégia 02 - Aritmética

Considerando que as meninas correspondem a três quintos do total de alunos, ou seja, são 750 meninas, é possível encontrar o total de alunos da escola multiplicando cinco vezes 250, veja:

$$5 \times 250 = \mathbf{1.250}\ \boldsymbol{alunos}$$

Assim, este problema pode ser resolvido por meio do raciocínio lógico, uma vez que, três quintos são 750. Então, cada parte corresponde a 250, logo, somamos 250 por cinco vezes, bem como podemos efetuar o produto, conforme abaixo:

Soma:

$$Alunos = 250 + 250 + \ 250 + 250\ + 250 = \mathbf{1.250}$$

Produto:

$$Alunos\ = \ 5 \times 250\ = \mathbf{1.250}$$

Portanto, aritmeticamente é possível resolver este problema somando as quantidades, como também, multiplicando-as.

Sugestões para resposta:

1) Há 1.250 alunos na escola ao todo.
2) A escola tem no total 1.250 alunos.

Habilidades - BNCC

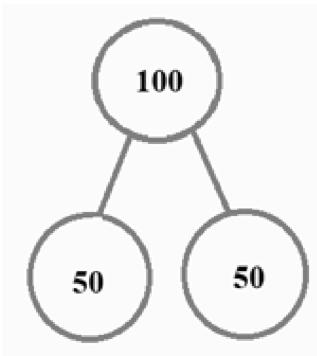
HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA09), (EF06MA03).**

Problema 1.4 – Pés de codorna e coelho

Na fazendinha de uma escola de Sinop-MT há aves e animais. Uma professora levou seus alunos para contarem a quantidade de galinhas e os coelhos. Eles contaram 16 cabeças e 42 pés ao todo. Quantas galinhas e coelhos têm na fazendinha da escola?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), este problema é convencional nos livros didáticos. Assim, pensamos em uma estratégia simples reconhecida como "**Number Bond**[1]" (Números conectados), como também podemos utilizar o recurso **Árvores de Possibilidades** que está relacionada com a "decomposição de um número em partes" trabalhado de forma lúdica, com uma exploração concretizada e simbólica de cada quantidade.



Importante:

Ao fazer a decomposição separamos em unidades as ordens que formam os números. Quando juntamos as unidades de um número dizemos que estamos fazendo a composição.

Lembre-se:

o uso de diagramas é estimulado e reconhecida a sua importância na resolução de problemas.

Interpretação

Sujeitos: Galinhas e coelhos.
Dados numéricos:
42 pés;
16 cabeças;

Incógnita: Quantas galinhas e coelhos têm na fazendinha da escola?

Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto

Para esta solução, a atividade mental foi desenvolvida manipulando o material concreto, bichinhos, que também podem ser recortes das imagens de galinhas e coelhos.

Aves e animais (16 cabeças e 42 pés)	
Codorna	Coelho
	

Fonte: https://pixabay.com/pt/photos/frango-galinha-branca-4091977/; http://avidaanimall.blogspot.com/2011/04/coelho.html

Considerando que são 16 cabeças e têm 42 pés, é preciso evidenciar que uma codorna tem dois pés e um coelho tem 4 pés. Assim, para encontrarmos a quantidade exata de galinhas e de coelhos, podemos usar a estratégia de agrupamento para a resolução deste problema, pois por meio dela têm maior probabilidade de serem os acertos. Veja:

Aves e animais (16 cabeças e 42 pés)	
Galinhas	Coelhos
	
11	**5**

Portanto, ao propor a distribuição de cada cabeça observando na imagem a quantidade de pés de cada bichinho, ficará fácil de matematizar a quantidade exata de galinhas e de coelhos.

Desta forma, consideramos o agrupamento uma estratégia para resolver este problema.

Estratégia 02 – Suposição

Outra resolução que estimamos é por meio de heurísticas, assim, este problema pode ser resolvido considerando a quantidade de cabeças ou pés.

Suponhamos que as 16 cabeças são apenas galinhas. Deste modo, ao resolver o estudante descobrirá que pela quantidade de pés não terá como ser apenas da galinha, logo vai acrescentando parte ao coelho. Assim, para encontrarmos a quantidade exata de galinhas e de coelhos, podemos usar a estratégia de suposição para a resolução deste problema.

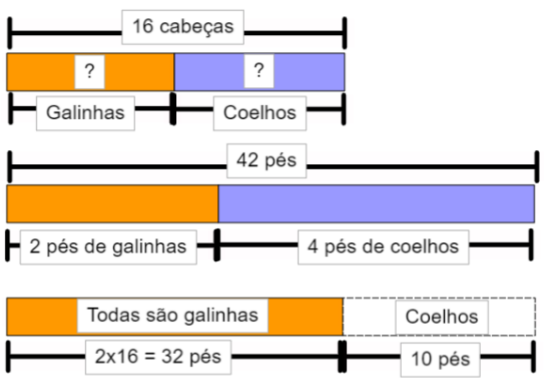
Quadro 6: Estratégia de suposição.

Galinhas	Quantidade de pés	Coelhos	Quantidade de pés	Total de pés
16	32	0	0	32
0	0	16	64	64
5	10	11	44	54
8	16	8	32	48
10	20	6	24	44
11	22	5	20	42

Fonte: Elaborada pela autora (2021)

Estratégia 03 – Modelando com as Barras

Neste problema, modelando a partir das barras, temos um total de cabeças em que a barra foi dividida em duas partes. Na cor laranja estão representadas as galinhas e na cor azul, os coelhos. O problema também apresenta o total de 42 pés.



Observando a última barra, supomos que as 16 cabeças são apenas galinhas. Supondo 16 pés, percebemos que essa não será a quantidade correta. Logo, a quantidade de pés não será das galinhas, e, para isso acontecer, faz-se o acréscimo nos pés dos coelhos.

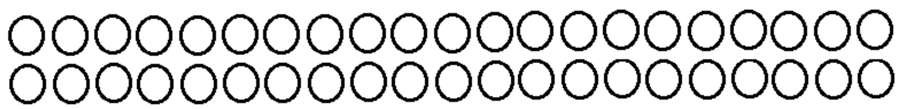
Veja como ficaria a próxima suposição se fossem 10 galinhas. Precisaria multiplicar a quantidade de cabeças pela quantidade de pés, ou seja, $10 \times 2 = 20$, se são 20 pés, faça a diferença com a quantidade do enunciado do problema, logo, $42-20 = 22$. Agora, precisa encontrar a quantidade de coelhos, primeiro faça a diferença das cabeças, $16 - 10 = 6$, observe que 6 seria a quantidade de coelhos, porém ao contabilizar os pés há divergência nas quantidades no enunciado do problema, pois $6\times 4 = 24$. A divergência seria de 2 pés a mais, nesta suposição, ou seja, o total de pés ultrapassaria o do problema, visto que $24+20 = 44$.

Vamos para a próxima tentativa, observe que ultrapassaram 2 pés nos coelhos, isso quer dizer que devemos aumentar o número de cabeças das galinhas, como são 2, aumenta 1 galinha, logo, $11 \times 2 = 22$, que é o total de galinhas, agora a quantidade de coelhos, $5\times 4 = 20$, assim confrontamos os dados como forma de conferir a estratégia de suposição, 22+20$=$ 42 pés e, $11 + 5 = 16$ cabeças.

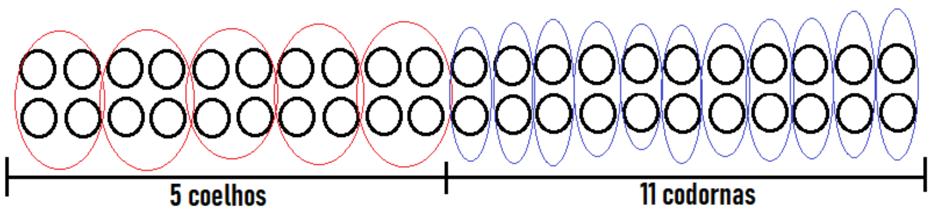
Portanto, o total de galinhas são 11 e o total de coelhos 5.

Estratégia 04 – Agrupamento

É possível resolver este problema utilizando a estratégia de agrupamento. Para isso, representaremos os 42 pés em formato de círculos. Veja:



Nesta estratégia, iniciamos primeiramente circulando, na cor azul, de 2 em 2 círculos representando a quantidade dos pés das galinhas, sendo que circulamos, na cor vermelha, de 4 em 4 a quantidade dos pés dos coelhos da seguinte maneira:



Caro colega Professor(a), neste problema é interessante apresentar aos estudantes material concreto peixinhos.

Lembre-se:

O material concreto desenvolve o raciocínio do aluno estimulando o pensamento lógico matemático, na construção de esquemas conceituais dando contornos e significados.

Portanto, essa estratégia possibilita encontrarmos a quantidade exata de galinhas e de coelhos.

Sugestões para resposta:

1) Na fazendinha da escola tem 11 galinhas e 5 coelhos.
2) Há 11 galinhas e 5 coelhos na fazendinha da escola.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF04MA08), (EF05MA09), (EF06MA03).**

Problema 1.5 – Aquário

Em um grande aquário um quarto dos peixes são dourados. Há 4 pintados a mais do que dourados no aquário. Os 16 peixes restantes são tucunarés. Quantos peixes existem no aquário?

Interpretação

Sujeitos: Peixes dourados, peixes pintados, peixes tucunarés

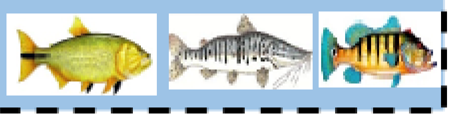
Dados numéricos:

$\frac{1}{4}$ dos peixes são dourados.

Há 4 pintados a mais do que dourados.

Os 16 peixes restantes são tucunarés.

No final deste livro há o encarte com as figuras ampliadas para impressão, recorte e manuseio.



Incógnita: Quantos peixes existem no aquário?

Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto

Para esta solução a atividade mental foi desenvolvida manipulando o material concreto peixinhos, veja a seguir.

Aquário		
Dourados	Pintados	Tucunarés
		

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/676736281487116506/; https://br.pinterest.com/pin/208291551494097914/; https://br.pinterest.com/pin/696932111055320270/.

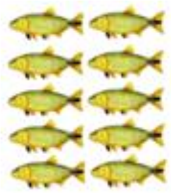
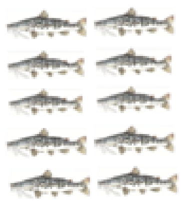
Sabemos que $\frac{1}{4}$ são dourados, assim dividimos o aquário em 4 partes iguais, veja:

Aquário			
$\frac{1}{4}$ são dourados			

Como há 4 pintados a mais que dourados e o restante são 16 peixes tucunarés, para encontrarmos a quantidades de peixes, podemos estruturar o pensamento da seguinte maneira:

Aquário				
$\frac{1}{4}$				
		 		
dourados	dourados	4	Restante	Restante
$\frac{1}{4}$ são dourados	?	   	16	

A partir dos peixes tucunarés e os 4 pintados é possível encontrar a quantidade de peixes dourados, veja:

<table>
<tr><td colspan="5">Aquário</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dourados</td><td colspan="2">Pintados</td><td colspan="2">Tucunarés</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>6</td><td>Restante</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">10</td><td>10</td><td>4</td><td colspan="2" rowspan="2">16</td></tr>
<tr><td colspan="2">14</td></tr>
</table>

Portanto, a segunda parte mais quatro representam os peixes pintados, a terceira parte sobram 6 peixes que fazem parte dos tucunarés, assim como restaram 10 peixes na última parte, entendemos que cada parte corresponde a 10 peixes. Logo, são 10 peixes dourados e, como os pintados são a quantidade de dourados mais 4, obtemos 14 peixes pintados. Por fim, sabemos que há 16 tucunarés no aquário.

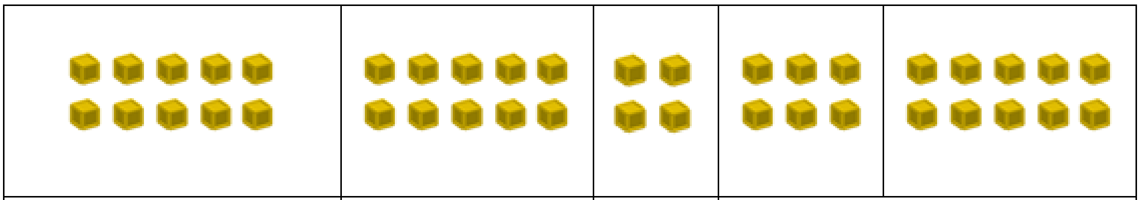
Estratégia 02 – Utilizando Material Dourado

No aquário $\frac{1}{4}$ dos peixes são dourados, assim dividimos o aquário em 4 partes iguais, veja:

Aquário			
Dourados			

Como há 4 pintados a mais que dourados (representamos com 4 cubinhos) e o restante são 16 peixes tucunarés (representamos com 1 barra e 6 cubinhos). Para encontrarmos a quantidades de peixes distribuímos o material dourado da seguinte maneira:

Aquário				
Dourados	Pintados		Tucunarés	
		4		Restante

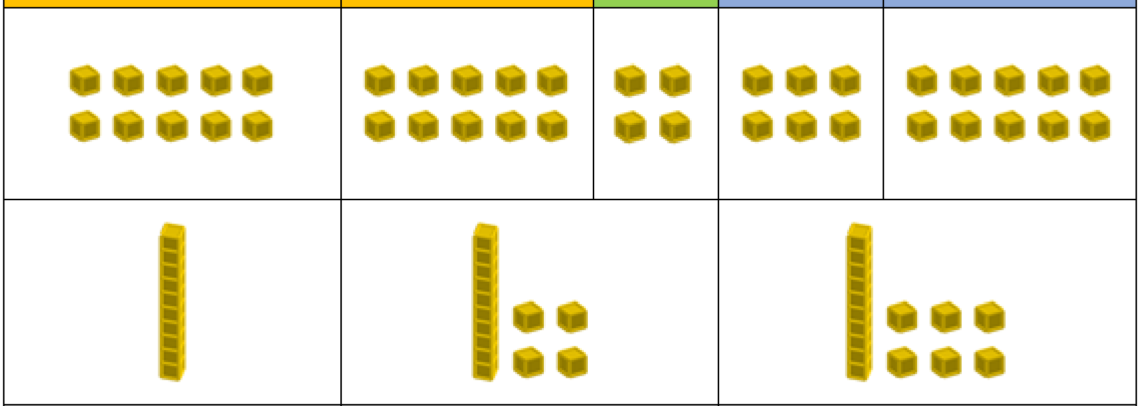


10	10	4	16	
	14			

Desta forma, é possível verificar que metade do aquário corresponde a 20, ou seja, 4 mais 16 é a quantidade de peixes da metade do aquário. A segunda parte mais quatro cubinhos representam os peixes pintados. A terceira parte sobram 6 cubinhos que fazem parte dos tucunarés, assim como restaram 10 cubinhos na última parte, entendemos que cada parte corresponde a 10 cubinhos. Logo, são 10 peixes dourados e, como os pintados são a quantidade de dourados mais 4, obtemos 14 peixes pintados. Por fim, sabemos que há 16 tucunarés no aquário.

Então, ainda é possível trocar a quantidade de cubinho por barra, pois a cada 10 cubinhos trocamos por uma barra. Veja:

Aquário				
Dourados	Pintados		Tucunarés	
		4		Restante



10	14	16

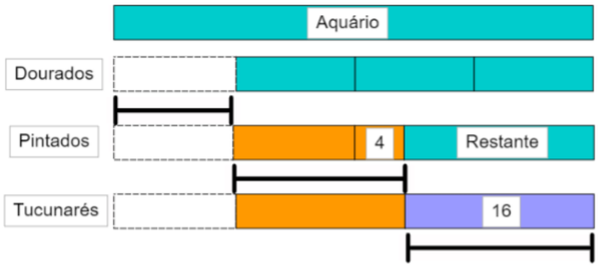
Por fim, concluímos que a primeira parte, 1 barra representa os peixes dourados, a segunda parte 1 barra mais 4 cubinhos representam os peixes pintados, e o restante 6 cubinhos, mais a última parte, representada por 1 barra, estão os peixes tucunarés.

Portanto, no aquário há 10 peixes dourados, 14 peixes pintados e 16 peixes tucunarés, logo o total são 40 peixes no aquário.

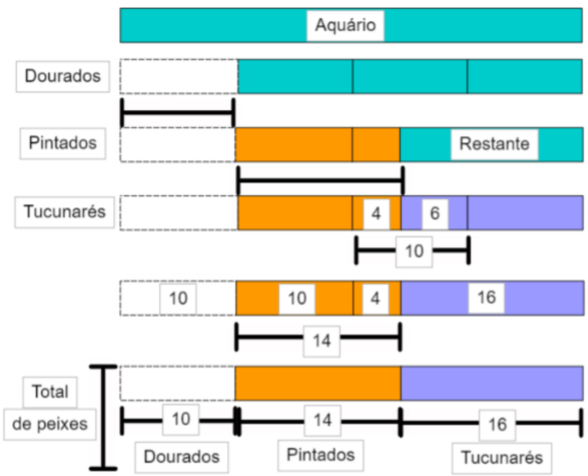
Estratégia 03 – Modelando com as Barras

Neste problema, modelando a partir das barras, temos um todo representado pela barra inteira de cor azul, ou seja, o aquário. Diante do problema, sabemos que $\frac{1}{4}$ dos peixes são dourados, assim dividimos a barra inteira em 4 partes iguais e uma dessas partes representará os peixes dourados.

O problema traz também que os peixes pintados correspondem a quantidade de peixes dourados, mais 4. Assim, a parte destacada mais um pedaço referente ao mais 4. E, por último, apresenta que o restante são os tucunarés. Veja a representação com as barras:



É possível identificar nas barras a quantidade de peixes em cada parte, pois se são 16, os peixes restantes e foram tomados 4 peixes pintados, encontramos a quantidade de peixes correspondente a metade do aquário. Logo restam 6 peixes. Assim obtemos a quantidade de peixes em uma parte que são 10 e sendo os pintados a mesma quantidade de dourados, mais 4, encontramos 14 peixes pintados. Veja a seguir a representação com as barras:



Portanto, há no aquário 40 peixes no total, o restante corresponde aos 16 peixes tucunarés, a primeira parte são os 10 peixes dourados e há 14 peixes pintados.

Estratégia 04 - Iniciação à Álgebra

Considerando que $\frac{1}{4}$ dos peixes são dourados, e a quantidade de peixes pintados é a mesma quantidade de dourados, mais 4, e o restante são 16 peixes tucunarés, podemos operar a partir da seguinte equação numérica:

$$\mathrm{P} = \overbrace{\frac{1}{4}\mathrm{p}}^{Dourados} + \overbrace{\left(\frac{1}{4}p + 4\right)}^{Pintados} + \overbrace{16}^{Tucunarés} = \frac{2}{4}\mathrm{p} + 20 = \frac{2}{4}\mathrm{p} + 20 = \frac{1}{2} + 20 = 2.(20) =$$

40 peixes

Para resolvermos a equação, primeiramente, agrupamos os números mistos. Depois, como há frações com denominadores iguais, utilizamos a propriedade comutativa da adição e organizamos a equação para facilitar a resolução. Observe também que chegando na fração $\frac{2}{4}$ foi possível simplificar numerador com denominador, obtendo $\frac{1}{4}$. Assim temos um número fracionário e um inteiro, para resolvermos a fração própria, ou seja, numerador menos que denominador, podemos usar a técnica do mínimo múltiplo comum (M.M.C) ou multiplicar o denominador pelo número inteiro. Portanto, a quantidade de peixes existentes no aquário é 40.

Sugestões para resposta:

1) No aquário há 10 peixes dourados, 14 peixes pintados e 16 peixes tucunarés.
2) Ao todo são 40 peixes no aquário.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF05MA13), (EF06MA09), (EF06MA10).**


PROBLEMAS
DE
COMPARAÇÃO

Neste segundo bloco, apresentamos coleção de problemas, tipo comparação para desenvolver atividades em sala de aula, referentes ao Modelo de Barras como recurso pedagógico na resolução de problemas matemáticos.

Quando tratar de comparação, temos um problema que envolve operações de adição ou subtração. Logo, a barra maior é sempre desenhada, separada da outra, em uma é desenhada a barra do aditivo e por baixo dessa o subtrativo, sendo o resultado a comparação de uma com a outra, ou seja, a diferença.

Assim, é importante que nos modelos de comparação haja pelo menos duas barras, uma para cada sujeito envolvido.

Já vimos que, dependendo da abordagem dada ao problema, podemos ter modelos matemáticos diferentes. Por vezes, torna-se impossível obter um modelo matemático que traduza exatamente o problema real, enquanto, em outras, um tal modelo é demasiado complexo para ser tratado.

Nesses casos, para obter um modelo tratável, necessitamos impor certas restrições idealistas de simplificações do modelo. O modelo matemático obtido então é um modelo aproximado, que não traduz exatamente a realidade.

Devido às alterações e/ou simplificações, a solução de um modelo aproximado, ainda que exata, deve ser considerada factível de erros. Recomendamos, então, que sejam feitos experimentos a fim de verificar se as simplificações são compatíveis com os dados experimentais, ou seja, uma validação do modelo simplificado.

Problema 2.1 – Gibis

Patrícia e Juliana são leitoras e colecionam gibis da turma da Mônica. Patrícia tem 84 gibis. Juliana tem 76 gibis. Quantos gibis Juliana tem a menos que Patrícia?

Interpretação

Sujeitos: Patrícia e Juliana

Dados numéricos:

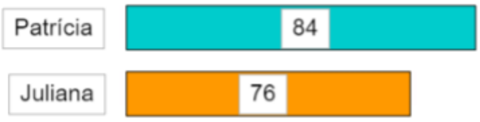
Patrícia tem 84 gibis.

Juliana tem 76 gibis.

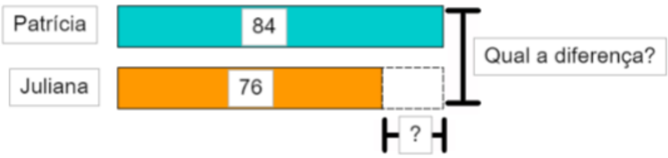
Incógnita: Quantos gibis Juliana tem a menos que Patrícia?

Estratégia 01 – Modelando com as Barras

Utilizando a estratégia do Modelo de Barras para representar os dados numéricos do problema, temos a seguinte representação, Patrícia com 84 gibis e Juliana com 76 gibis:



Observando a representação acima, percebemos uma diferença que está visivelmente na seguinte imagem:



Ou, também podemos comparar os sujeitos representando do menor para o maior, pois o espaço amostral torna-se compreensível ao modo de visualizar.

Considerando as barras, percebemos uma diferença entre os sujeitos, esta seria a quantia que Juliana tem a menos do que Patrícia, isto é, se diminuirmos 84 de 76 o resultado é 8, sendo assim, a diferença de gibis que Juliana tem a menos do que Patrícia é 8.

Estratégia 02 - Aritmética

Para resolvermos algebricamente este problema, primeiramente podemos elaborar uma operação de subtração, veja:

$$Gibis = Patrícia - Juliana = 84 - 76 = \mathbf{8}$$

Da mesma forma, podemos trabalhar o raciocínio lógico, pensar no menor número, ou seja, 76, gibis da juliana, e contar até chegar no 84, gibis da Patrícia, assim a quantidade de um número a outro será a diferença, veja:

76 77 78 79 80 81 82 83 84

Concluímos que Juliana tem 8 gibis a menos que Patrícia.

Exemplificando essa situação podemos discutir sobre a questão do troco de uma determinada compra, na "escola é ensinado a subtração do total pago (um número) menos total a pagar (um número), e que a maneira de se fazer subtrações é escrever um número embaixo do outro", porém não é bem assim, o interessante seria usar o procedimento de "completar":

> "se você pagou com uma nota de dez reais, e a despesa foi de quatro reais e sessenta e três, ela vai "completando" até chegar a dez: junta dois centavos e diz "quatro e sessenta e cinco", mais cinco centavos e diz "quatro e oitenta", mais vinte centavos e diz "cinco reais", mais cinco reais e diz "dez reais", e dá o troco dizendo "dez reais", o total alcançado, e não total do tronco" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 20-21).

Assim, este problema pode ser resolvido por meio do uso da operação "completar".

Sugestões para resposta:

1) Juliana tem 8 gibis a menos que Patrícia.
2) Patrícia tem 8 gibis a mais do que Juliana.

Habilidades - BNCC

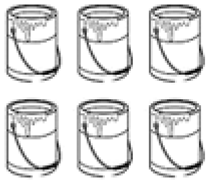
HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA05), (EF04MA06), (EF04MA08), (EF05MA07), (EF06MA03).**

Problema 2.2 – Latas de tinta

Rebeca e Jonas compraram latas de tinta para pintar suas casas. Rebeca comprou 6 latas e Jonas 5 vezes mais que Rebeca. Quantas latas de tinta eles compraram?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), recomendamos representar os dados do problema utilizando a estratégia material concreto: latinhas, como também o uso do material dourado.



Interpretação

Sujeitos: Rebeca e Jonas.

Dados numéricos:

Rebeca comprou 6 latas.

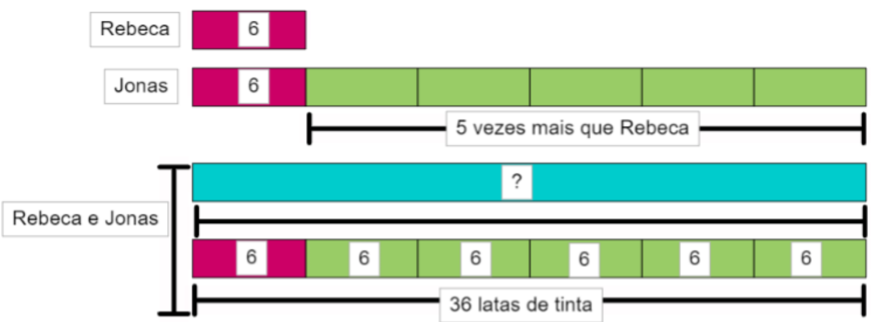
Jonas 5 vezes mais que Rebeca.

Incógnita: Quantas latas de tinta eles compraram?

Estratégia 01 - Modelando com as Barras

Neste problema ao utilizarmos a representação por meio das barras, é possível visualizar que seis (6) é a quantidade de Rebeca, cor rosa, e as cinco (5) partes, cor verde, representam a quantidade que Jonas comprou.

Neste sentido, podemos verificar que cada parte equivale a seis (6), quantidade de latas de Rebeca, logo, adicionando cinco (5) partes teremos 30 latas, sendo esta a quantidade de Jonas. Confira a modelagem nas barras:



Portanto, ao juntarmos todas as partes, de Rebeca e de Jonas, temos um total de 36 latas de tinta.

Estratégia 02 - Aritmética

Considerando que a quantidade atribuída a Jonas foi cinco vezes mais que a de Rebeca, podemos fazer a seguinte operação:

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \mathbf{30\ \textit{latas}}$$

Como, também, é possível fazer uma operação por meio da multiplicação, ou seja, a quantidade de vezes multiplicada pela quantidade de latas de Rebeca, veja:

$$5\ x\ 6 = \mathbf{30\ \textit{latas}}$$

Concluímos que Jonas comprou 30 latas de tinta e Rebeca comprou 6. Assim, eles compraram um total de 36 latas de tinta.

Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra

É possível propor neste problema também uma solução que use o valor desconhecido, uma incógnita. Para melhor compreensão, nomeamos R para Rebeca e J para Jonas, como são as iniciais dos seus nomes, esta é uma forma de familiarizar-se com a incógnita, conforme expressão abaixo:

Rebeca	**Jonas**
$R = 6$	$J = R + 5R$

Ao substituímos o valor de R na seguinte expressão $J = R + 5R$ encontraremos a quantidade de latas de tinta que Jonas comprou, veja:

$$J = R + 5R = 6 + 5.(6) = 6 + 30 = \mathbf{36\ \textit{latas de tinta}}$$

Caro colega Professor(a), nesta situação tratando de uma multiplicação apresente ao estudante o símbolo ponto (.) ao invés de utilizar um **x**, pois a intenção é evitar confusões em expressões algébricas, uma vez que normalmente o x é usado para representar as variáveis.

Lembre-se:

O símbolo da multiplicação em expressões utilizamos o ponto (.)

Por exemplo:

4.x = 20

Sugestões para resposta:

1) Rebeca e Jonas compraram 36 latas de tinta.
2) Eles compraram 36 latas de tinta.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA06), (EF04MA08), (EF05MA08), (EF05MA11), (EF06MA03).**

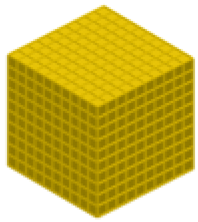
Problema 2.3 – Zoológico do parque de diversões Beto Carrero World

No parque de diversões Beto Carrero World tem um zoológico destinado a proteção, amparo e conservação de centenas de espécies de animais. Nessas condições, o zoológico tem um elefante que pesa 4.000 kg, uma girafa que pesa a quinta parte do elefante, e o hipopótamo pesa 1.000 kg a mais que girafa. Quanto pesa a girafa e o hipopótamo?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), este problema pode ser trabalhado inicialmente com as barras, porém se os estudantes não compreenderam e identificaram os sujeitos do problema, recomendamos utilizar a estratégia com o material dourado.

Caro colega Professor(a), nesta situação recomendamos que informe aos estudantes que está sendo trabalhado unidades de milhar, logo apresente o cubo como peça principal para representação.



Interpretação

Sujeitos: Elefante, girafa e o hipopótamo

Dados numéricos:

Elefante que pesa 4.000 kg.

Girafa que pesa a quinta parte do elefante.

Hipopótamo pesa 1.000 kg a mais que girafa.

Incógnita: Quanto pesa o hipopótamo e a girafa?

Estratégia 01 – Modelando com as Barras

Primeiramente, para modelar com as barras precisamos representar o peso do elefante em uma única barra, pois é o único dado numérico que temos com valor inteiro. Abaixo, dividimos o peso do elefante em cinco partes iguais, uma vez que o peso da girafa corresponde a sua quinta parte ou $\frac{1}{5}$, sendo representada pelo recorte para facilitar a visualização. E, na última barra, representamos o peso da girafa em uma barra e na mesma linha mais uma barra correspondente a 1000, conforme o problema. Veja:

Diante disso, o peso do elefante é 4.000kg e foi dividido em cinco partes iguais para encontrarmos o peso da girafa. Logo, cada parte equivale a 800. E, o peso do hipopótamo é o peso da girafa mais 1000, assim ele pesa 1800kg. Observe a comparação das barras para cada animal:

Portanto, o elefante pesa 4.000kg, a girafa pesa 800kg e o hipopótamo pesa 1.800kg.

Estratégia 02 - Aritmética

Nesta estratégia, considerando que 4.000 é o peso do elefante e a girafa pesa $\frac{1}{5}$ de seu peso, podemos fazer a seguinte operação aritmética, para encontrarmos o peso da girafa:

$$\frac{1}{5} \text{ de } 4.000 = 1.\frac{4000}{5} = 800$$

Seguindo essa estratégia, fica fácil de resolver o peso do hipopótamo, pois é só somar o peso da girafa com 1000:

$$800 + 1000 = \mathbf{1.800}$$

Concluímos que o peso do hipopótamo é 1.800kg.

Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra

É possível propor também uma estratégia que use o valor desconhecido, isto é uma incógnita. Para facilitar a compreensão, sugerimos que seja atribuída a inicial de cada sujeito. Desta forma, elaboramos uma equação algébrica para cada animal, veja:

Elefante	Girafa	Hipopótamo
e	$g = \frac{e}{5}$	$h = g + 1000$
$\boldsymbol{e = 4.000}$	$g = \frac{e}{5}$ $g = \frac{4.000}{5}$ $\boldsymbol{g = 800}$	$h = g + 1000$ $h = 800 + 1000$ $\boldsymbol{h = 1.800}$

Considerando que ***e, g, h*** sejam as incógnitas referentes ao elefante, a girafa e ao hipopótamo respectivamente, interpretando o problema, sabemos que o valor de ***e*** corresponde a 4.000, em seguida, o valor de ***g*** é a quinta parte do elefante, assim representamos pela fração $\frac{e}{5}$, por fim, o valor de ***h*** é o peso da girafa mais 1000, logo, representamos os dados pela equação h = g + 1000.

Portanto, a resposta de cada equação é simultânea, a saber, dependem da primeira para encontrar o valor da próxima. Então, como temos o valor de **e**, primeira equação, substituímos na segunda encontrando ***g***, da mesma forma na última, substituímos o **g** para encontrarmos o ***h***.

Concluímos que o elefante pesa 4.000kg, a girafa pesa 800kg e o hipopótamo pesa 1.800kg.

Sugestões para resposta:

1) O elefante pesa 4.000kg, a girafa pesa 800kg e o hipopótamo pesa 1.800kg.
2) A girafa pesa 800kg e o hipopótamo pesa 1.800kg.

Habilidades – BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA06), (EF04MA08), (EF05MA08), (EF05MA11), (EF06MA09), (EF06MA10).**

Problema 2.4 – Alunos do 4º Ano

Três quintos dos alunos no 4º ano “A” e três quartos dos alunos no 4º ano “B” são meninas. Ambas as turmas têm o mesmo número de meninas e o 4º ano “A” tem 8 meninos a mais do que a 4º ano “B”. Quantos alunos têm no 4º ano “A”?

Interpretação

Sujeitos: 4º ano “A” e 4º ano “B”.

Dados numéricos:

Temos, três quintos e três quartos que são representados pelas seguites frações:

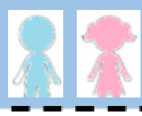
$\frac{3}{5}$ dos alunos no 4º ano “A” são meninas

$\frac{3}{4}$ dos alunos no 4º ano “B” são meninas

4º ano “A” tem 8 meninos a mais do que a 4º ano “B”

Incógnita: Quantos alunos têm no 4º ano “A”?

No final deste livro há o encarte com as figuras ampliadas para impressão, recorte e manuseio.



Estratégia 01 - Utilizando Material Concreto

A partir da utilização de material concreto bonequinhos, adotados para esta estratégia, é possível chegar na seguinte solução.

Meninas	Meninos
	

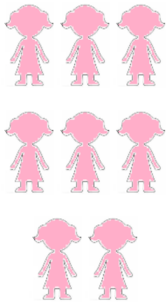
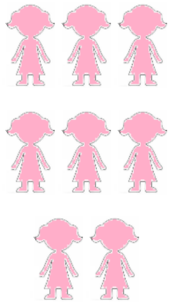
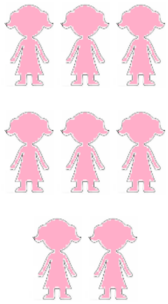
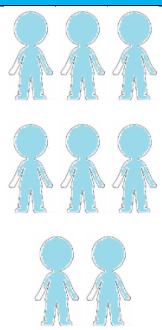
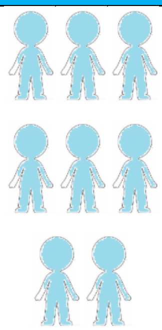
Sabemos que $\frac{3}{5}$ dos alunos no 4º ano “A” são meninas.

$\frac{3}{5}$ meninas				

E $\frac{3}{4}$ dos alunos no 4º ano “B” também são meninas.

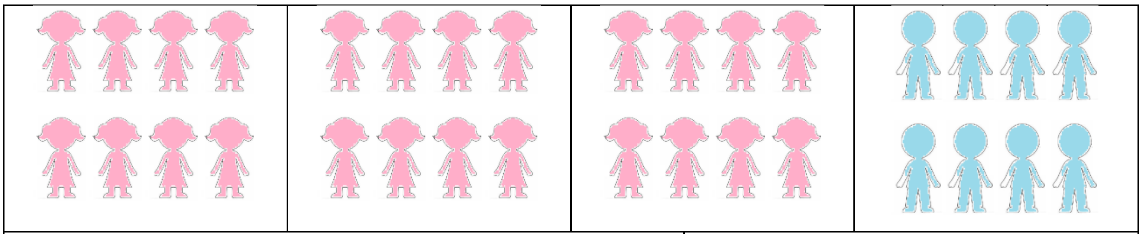
$\frac{3}{4}$ meninas			

No 4º ano “A” tem 8 meninos a mais do que a 4º ano “B”. Desse modo, como as partes são iguais, deduzimos que este valor corresponde as demais. Assim, temos a seguinte representação para o 4º ano “A” com o material concreto.

4º ano “A”				
$\frac{3}{5}$ meninas				
8	8	8	8	8
				
8 + 8 + 8 = 24			8 + 8 = 16	
24 meninas + 16 meninos = 40 alunos				

E a representação para o 4º ano “B” com o material concreto.

4º ano “B”			
$\frac{3}{4}$ meninas			
8	8	8	8



8 + 8 + 8 = 24	8
24 meninas + 8 meninos = 32 alunos	

Portanto, o total de alunos que há em cada sala de aula é a soma dos meninos e das meninas, no 4º ano “A” temos 24 meninas e 16 meninos, totalizando 40 alunos. Já no 4º ano “B” temos 24 meninas e 8 meninos, totalizando 32 alunos.

Estratégia 02 – Utilizando Ábaco

A estratégia de resolução deste problema pode ser desenvolvida com a utilização do recurso pedagógico ábaco. Neste problema utilizaremos dois ábacos, um para representar a turma do 4º ano “A” e outro para a turma do 4º ano “B”.

Assim, com o auxílio do ábaco, sendo que este não foi utilizado pela sua função de classificar e ordenar, contudo usado como suporte representativo em que os pinos e o movimento das argolas podiam representar as quantidades do enunciado do problema.

Assim, representamos os dados numéricos do problema por meio das argolas, nos suportes, sendo a cor laranja representada pelo número de meninas, visto que ambas as turmas, o número de meninas é $\frac{3}{5}$ dos alunos, e a cor verde representada pelo número de meninos, conforme a imagem abaixo.

Reparem que há um ábaco com 5 pinos e o outro com 4 pinos, isso porque temos na turma do 4º ano “A” 8 meninos a mais do que a 4º ano “B”. Desse modo, como as partes são iguais deduzimos que este valor corresponde as outras também.

Então, ao analisarmos as representações nos pinos de cada ábaco, percebemos que para o 4º ano “A” há 3 pinos com argolas laranjas e 2 pinos com argolas verdes, e para o 4º ano “B” há 3 pinos laranjas e um pino verde.

Desse modo, como cada pino tem 8 argolas, é possível chegar a quantidade de meninos e meninas de cada turma.

Portanto, é preciso somar as quantidades de argolas contidas em cada um dos pinos dos ábacos, logo, no ábaco de 5 pinos da turma do 4º ano A, tem 3 pinos laranjas e 2 verdes, sendo cada uma de valor 8, temos que há 24 meninas e 16 meninos. Já, no ábaco de 4 pinos da turma do 4º ano B, a soma das quantidades correspondentes dos 3 pinos laranjas e um verde equivalem a 24 meninas e 8 meninos.

Concluímos que o total de alunos do 4º ano A é 40 e o total de alunos do 4º ano B é 32.

Estratégia 03 – Utilizando Material Dourado

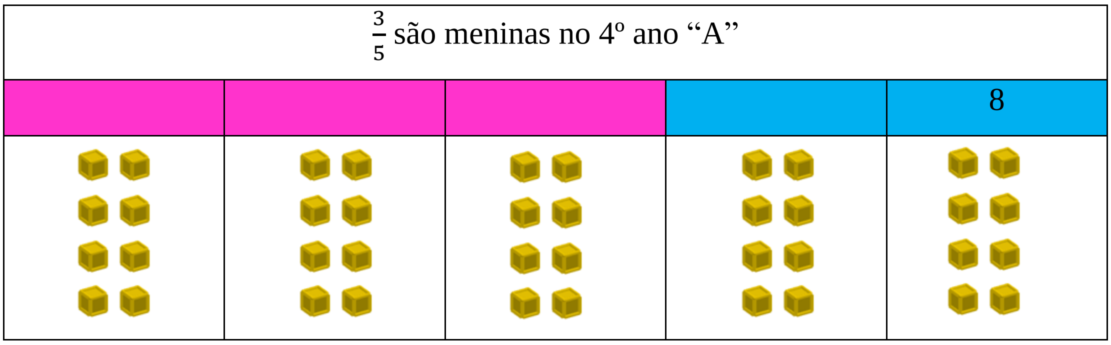
Sabemos que $\frac{3}{5}$ dos alunos no 4º ano “A” são meninas, com o auxílio do material dourado a representação desses dados numéricos ficará da seguinte maneira.

$\frac{3}{5}$ são meninas no 4º ano “A”				
				8

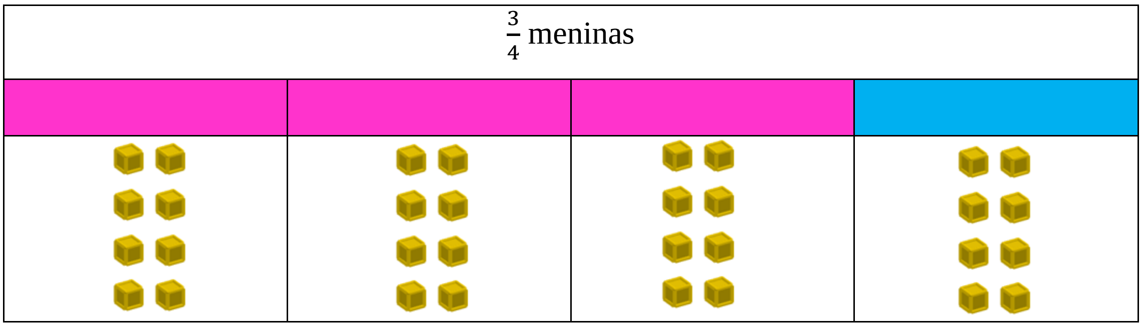
E $\frac{3}{4}$ dos alunos no 4º ano “B” também são meninas.

$\frac{3}{4}$ meninas			

Como cada parte é igual, e sabemos o valor de uma que é 8, é possível fazer uma representação utilizando material dourado, veja a seguir.

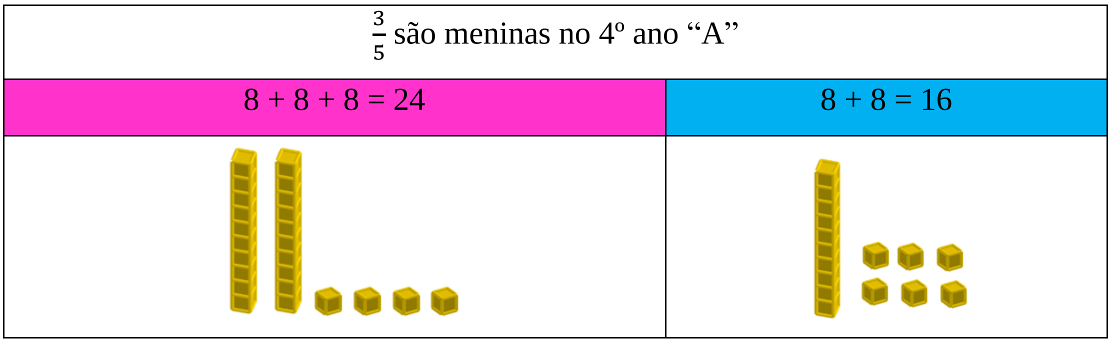


E $\frac{3}{4}$ dos alunos no 4º ano "B" também são meninas.



Para sabermos a quantidade de alunos de cada 4º ano e a representação com o material dourado, precisamos somar as quantidades dos meninos e das meninas. Dessa forma, para o 4 ano "A", somando os cubinhos da parte rosa que representam as meninas, temos 8 (cubinhos), mais 8 (cubinhos), mais 8 (cubinhos), totalizando 24 (cubinhos). E, somando os cubinhos da parte azul, que representam os meninos temos 8 (cubinhos), mais 8 (cubinhos), totalizando 16 (cubinhos).

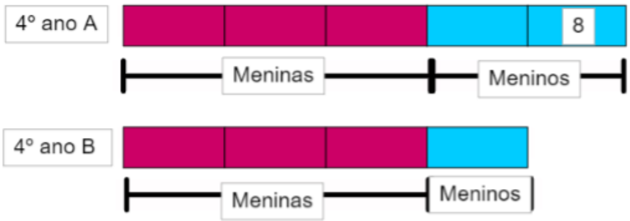
Portanto, o 4º ano tem 40 alunos, pois somamos 24 (cubinhos) mais 16 (cubinhos). Também podemos substituir 10 (cubinhos) por uma barra, então a representação poderá ser a seguinte:



Estratégia 04 – Modelando com as Barras

Para modelar o problema a partir das barras, primeiramente, precisamos compreender que o todo tem cinco (5) partes, pois, sabemos que $\frac{3}{5}$ dos alunos no 4º ano

"A" são meninas. Logo a representação desses dados numéricos ficará da seguinte maneira:



As três (3) partes rosas representam as meninas e as azuis os meninos. Reparem que na barra nomeada 4º ano "A" tem uma parte a mais equivalente a oito (8) porque esta sala tem meninos a mais do que a 4º ano B. Desse modo como as partes são iguais deduzimos que este valor corresponde às outras também.

Ao analisarmos as representações, verificamos que há três (3) partes rosas, duas (2) azuis para o 4º ano "A", três (3) partes rosas e uma (1) azul para o 4º ano "B".

Portanto, no 4º ano "A", somando as quantidades correspondentes as três (3) partes rosas, duas (2) azuis, sendo cada uma de valor oito (8), há 24 meninas e 16 meninos. Já, no 4º ano "B", a soma das quantidades correspondentes as três (3) partes rosas e uma (1) azul equivalem a 24 meninas e 8 meninos.

Concluímos que o total de alunos do 4º ano "A" é 40 e o total de alunos do 4º ano "B" é 32.

Estratégia 05 - Aritmética

Considerando que $\frac{3}{5}$ dos alunos no 4º ano "A" são meninas, sabemos que há 5 partes iguais e, que o valor correspondente a essa parte é 8. Então, podemos resolver o problema pela soma dos produtos da multiplicação para obtermos o total de alunos, veja:

$$5 \; x \; 8 = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$$

Da mesma forma, podemos fazer com os dados do 4º ano "B", ou seja, $\frac{3}{4}$ corresponde a 4 partes iguais que equivalem a 8. Logo, temos como resultado da multiplicação a seguinte operação:

$$4 \; x \; 8 = 8 + 8 + 8 + 8 = 32$$

Concluímos que o total de alunos do 4º ano “A” é 40 e o total de alunos do 4º ano “B” é 32.

Estratégia 06 – Iniciação à Álgebra

É possível propor também uma solução que use o valor desconhecido, a incógnita. Pois, dependendo do aluno e dos professores isso poderá servir de motivação, para evidenciar que o problema pode ser resolvido de forma geral por uma equação. Sabemos que na sala do 4º ano “A” tem $\frac{3}{5}$ de meninas e o restante da sala corresponde aos meninos, sendo que uma parte dos meninos equivale a 8, como são duas partes temos o valor 16. E, no 4º ano “B” tem $\frac{3}{4}$ de meninas e o restante da sala corresponde aos meninos, que é representado em uma parte apenas, equivale ao valor 8. Assim, temos as seguintes equações algébricas:

4º ano “A”	4º ano “B”
$\frac{3}{5}x + 16 = x$ $5.(\frac{3}{5}x + 16) = (x).5$ $3x + 80 = 5x$ $5x - 3x = 80$ $\frac{2}{2}x = \frac{80}{2}$ $\boldsymbol{x = 40}$	$\frac{3}{4}x + 8 = x$ $4.(\frac{3}{4}x + 8) = (x).4$ x $3x + 32 = 4x$ $4x - 3x = 32$ $\boldsymbol{x = 32}$

Assim, a quantidade de alunos do 4º ano “A” é 40 e do 4º ano “B” é 32 alunos.

Sugestões para resposta:

1) Tem 24 meninas e 16 meninos no 4º ano “A”, totalizando 40 alunos; e 24 meninas e 8 meninos no 4º ano “B”, totalizando 32 alunos.
2) No 4º ano “A” tem 40 alunos e no 4º ano “B” tem 32 alunos.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA06), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF05MA13), (EF06MA09), (EF06MA10).**

Problema 2.5 – Jogo de cartas

Todos os fins de semana a família Ferrari, primos e primas, se reúnem para jogar cartas, ganha o trio que fizer mais pontos. Na última jogada, foram fazer a somatória das cartas, constaram que Suzana fez 39 pontos a mais do que Mariana. Mariana fez 18 pontos a mais do que Luíza. Ao todo fizeram 261 pontos. Quantos pontos cada uma fez?

Interpretação

Sujeitos: Suzana, Mariana e Luíza.

Dados numéricos:

Suzana fez 39 pontos a mais do que Mariana.

Mariana fez 18 pontos a mais do que Luíza.

Total = 261 pontos.

Luíza =?

Incógnita: Quantos pontos cada uma fez?

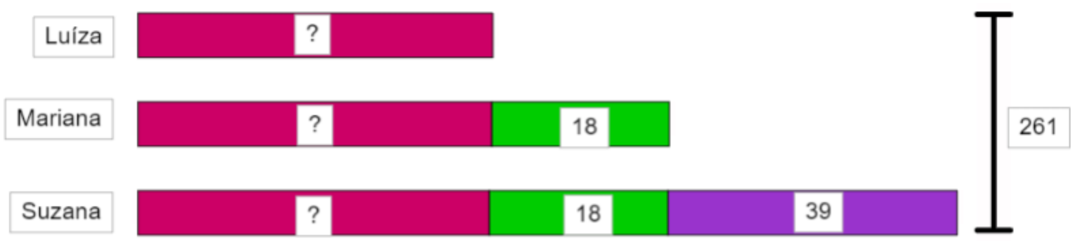
Orientações

Se os estudantes tiverem dificuldades, peça que retomem às etapas de Pólya e avaliem sua construção.

Estratégia 01 – Modelando com as Barras

Para modelarmos este problema, precisamos iniciar com uma barra comparativa e que não tenha o valor definido, pois com ela facilitará a visualização nas demais. Então, como o problema não trouxe a pontuação de Luíza é por ela que iniciaremos, representada pela cor rosa.

Em seguida, temos que Mariana fez 18 pontos a mais do que Luíza, logo, representamos a barra de Luíza com mais uma barra a frente os 18 pontos, cor verde. E, por último, representamos Suzana com a barra de Luíza e Mariana mais uma nova barra de 39 pontos, cor roxa. Veja:



Observe que é possível encontrar os pontos de Luíza porque o total é 261 pontos. Então, diminuímos 18 mais 18 mais 39, ou seja, 75 pontos, e sobrarão 186 pontos que dividiremos por três (3), correspondente a 62 e distribuiremos à Luíza, Mariana e Suzana.

Portanto, descobrimos que Luíza fez 62 pontos, Mariana fez 62 mais 18, isto é, 80 pontos e Suzana fez 62 mais 18 mais 39, logo fez 119 pontos.

Estratégia 02 – Aritmética

Para resolver este problema de forma aritmetica, precisamos diminuir do total de pontos, 261, às pontuações que o problema nos traz.

Para isso, subtraímos dos 261 os pontos de Mariana, 18, e de Suzana, 57 (18 e 39), restando 186 pontos. Veja:

$$261 - 18 - 57 = \mathbf{186}$$

Em seguida, dividimos os pontos por 3 para encontrarmos o valor que é comum às três.

$$186 \div 3 = \mathbf{62}$$

Diante desse valor, encontramos a pontuação de Luíza, 62 pontos, de Mariana ao somarmos a pontuação de Luíza mais seus 18 que é igual a 80 pontos, e de Suzana com a pontuação de Luíza, 62 pontos, a de Mariana e mais seus 39 pontos com um total de 119 pontos.

Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra

É possível propor também uma solução que use o valor desconhecido, a incógnita da seguinte maneira L = Luiza, L+18 = Mariana, L+18+L+18+39 = Suzana, assim juntando as representações, temos a seguinte equação:

$$\overbrace{L}^{Luíza} + \overbrace{L + 18}^{Mariana} + \overbrace{L + 18 + 39}^{Suzana} = 261$$

$$3L + 75 = 261$$

$$3L + 75 - 75 = 261 - 75$$

$$3L = 186$$

$$\frac{3}{3}L = \frac{186}{3}$$

$$\boldsymbol{L = 62}$$

Agora, substituímos o valor da incógnita L a cada expressão para encontrarmos a pontuação correspondente de cada uma, veja:

Luiza	Mariana	Suzana
L	M = L+18	S = L+18+39
?	62+18 = 80	62+18+62+18+39 = 119

Portanto, a pontuação correspondente à Luíza foi 62 pontos, Mariana 80 pontos e Suzana 119 pontos.

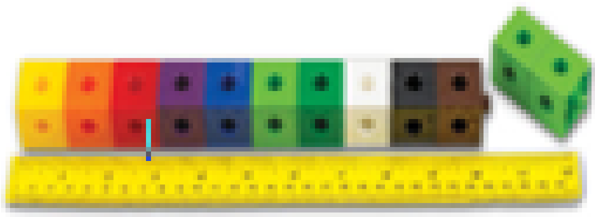
Sugestões para resposta:

1) Luíza fez 62, Mariana fez 80 e Suzana fez 119 pontos.
2) Do total de pontos do time, Luíza fez 62, Mariana fez 80 e Suzana fez 119 pontos.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA06), (EF04MA08), (EF05MA07), (EF05MA11), (EF06MA03).**

PROBLEMAS ANTES-DEPOIS



Muito bem!

Reservamos este último bloco para tratarmos de problemas, tipo antes-depois.

Se aplica quando a situação a que se refere o enunciado do problema implica em estado anterior e posterior, fornecendo alguns dados, em ambos os estados.

Assim, o modelo é aplicado quando o enunciado apresenta duas situações, separadas no tempo e com dados diferentes para cada uma delas. Este modelo, pouco diferente do modelo de comparação, diferencia-se deste pelo fato de anunciar dados de apenas um sujeito.

Neste bloco, daremos ênfase à representação dos números em porcentagem e das formas de representação dos números em Sistema de Numeração Decimal, nas quatro operações fundamentais da matemática e em frações, enfatizando a representação com barras, comumente adotada para resolução de problemas aritméticos.

Problema 3.1 – Tanque de combustível

Stela gastou três quintos do tanque de combustível e precisou colocar 36 litros, para completá-lo antes de enchê-lo. Quantos litros de combustível restavam no tanque?

Sugestão:

Caro colega Professor(a), por se tratar de um problema mais complexo, recomendamos que inicie utilizando material dourado com os estudantes.

Lembre-se:

Informe aos estudantes que há uma relação entre as medidas de capacidade **litro** e **mililitro**. 1 litro equivale a 1000 mililitros.

Interpretação

Sujeito: Tanque de combustível.

Dados numéricos:

Gastou $\frac{3}{5}$ do tanque de combustível.

Colocar 36 litros.

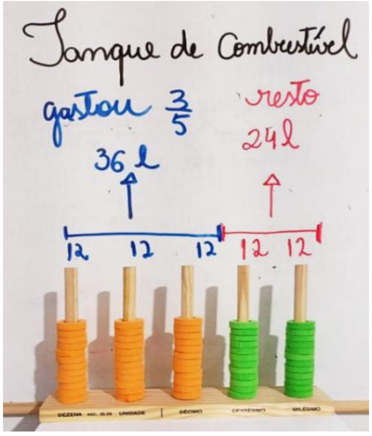
Incógnita: Quanto restava no tanque?

Estratégia 03 – Utilizando Ábaco

A estratégia de resolução deste problema pode ser desenvolvida com a utilização do recurso pedagógico ábaco. Neste problema utilizaremos o ábaco para representar o tanque de combustível.

Assim, o suporte do ábaco foi utilizado para representar o tanque de combustível, sendo que, cada pino representa a quinta parte do tanque de combustível. Em cada pino há 12 argolas, logo a parte laranja seriam os três quintos do tanque combustível que Stela gastou, ou seja, são 36 litros de combustível, já os dois quintos, parte verde, seriam os 24 litros restantes.

Lembrando que o ábaco foi utilizado não com a função de classificar e ordenar, contudo usado como suporte representativo em que os pinos e o movimento das argolas podiam representar as quantidades de litros, de cada parte do tanque de combustível.

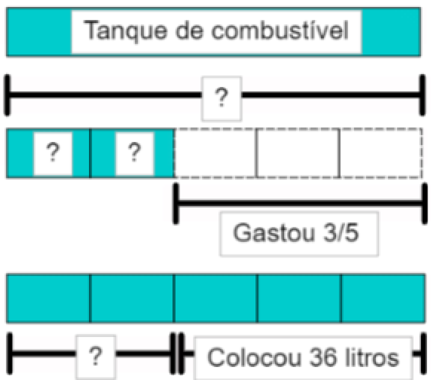


Assim, nessa estratégia, cada pino representa a quinta parte do tanque de combustível, como em cada pino há 12 argolas, logo a parte laranja seriam os três quintos do tanque combustível, que Stela gastou, ou seja, são 36 litros de combustível, já os dois quintos, parte verde, seriam os 24 litros restantes.

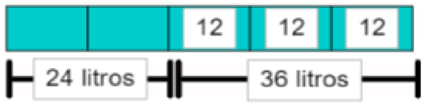
Portanto, a quantidade que restavam no tanque era 24 de litros de combustível.

Estratégia 02 - Modelando com as Barras

A partir da modelagem com as barras, representamos o todo, tanque de combustível, lembrando que Stela gastou $\frac{3}{5}$ do combustível, representado pela barra branca, ou seja, a parte subtraída do todo. Levando em consideração que antes de encher o tanque ela precisou colocar 36 litros para completá-lo, conforme representado abaixo.



Assim, a modelagem com as barras permite definir que cada $\frac{1}{5}$ do tanque equivale a 12 litros, logo o que restou no tanque foram 24 litros.



Estratégia 03 - Aritmética

Para calcularmos aritmeticamente o problema, tomamos que:

$$\frac{3}{5} = 36\ litros$$
$$\frac{1}{5} = 12\ litros$$
$$\frac{2}{5} = 24\ litros$$
$$\boldsymbol{24\ litros}$$

Portanto, $\frac{2}{5}$ de combustível restante no tanque, corresponde a 24 litros.

Estratégia 04 – Iniciação à Álgebra

É possível representar algebricamente pela seguinte operação, veja:

$$\frac{3}{5}.x = 36$$
$$3x = 180$$
$$x = \frac{180}{3}$$
$$x = 60$$
$$\frac{2}{5}.60 =$$
$$\frac{120}{5}$$
$$\boldsymbol{x = 24\ litros}$$

Portanto, a incógnita x equivale a 24 litros de combustível.

Sugestões para resposta:

a) Restavam 24 litros de combustível no tanque.

b) Antes de completar o tanque, restavam 24 litros de combustível.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF06MA09).**

Problema 3.2 – Livro de Fábio

Do total das páginas de um livro Fábio leu um quinto no primeiro dia e metade do restante no segundo dia, num total de 360 páginas lidas nos dois dias. Nessas condições, qual o total de páginas que ainda faltam para Fábio ler o livro?

Interpretação

Sujeito: Livro

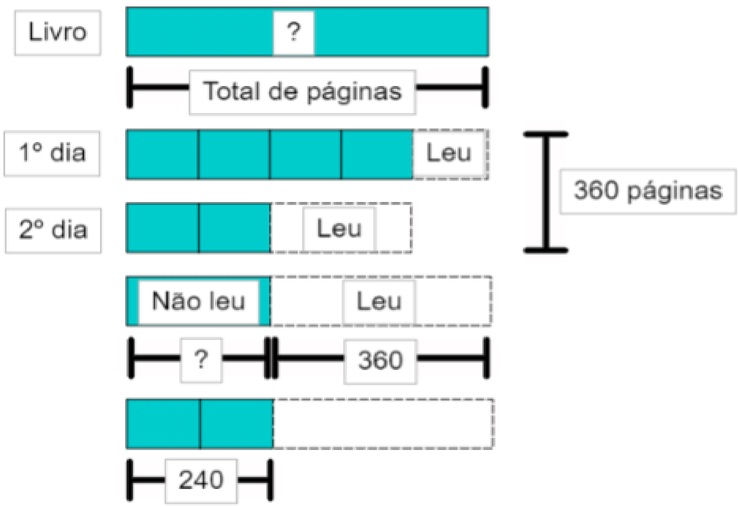
Dados numéricos:

Um quinto de páginas lidas no primeiro dia pode ser representado pela fração $\frac{1}{5}$.

A metade do restante de páginas lidas no segundo dia, que são dois quintos pode ser representado pela fração $\frac{2}{5}$.

Estratégia 01 - Modelando com as Barras

A partir da modelagem com as barras, representamos o todo, o livro, cujo não sabemos o total de páginas, mas, temos a quantidade de páginas lidas em dois dias, assim a estrutura modelada do antes, livro inteiro, e do depois, livro com algumas páginas lidas, ficou da seguinte forma:



A modelagem com as barras permite visualizar que o livro foi dividido em cinco partes iguais e que três equivalem a 360 páginas. Dessa forma, é possível pela lógica compreender que cada parte vale 120, logo temos que restam 240 páginas para ler.

Estratégia 02 - Aritmética

Para calcularmos aritmeticamente o problema, tomamos que o total de páginas lidas por Fábio seja $\frac{1}{5}$ mais $\frac{2}{5}$, cuja soma resulta uma fração de $\frac{3}{5}$. Dessa forma, para encontrarmos o total de páginas do livro precisamos multiplicar os $\frac{3}{5}$ pelos 360, veja abaixo:

$$\frac{3}{5}\ de\ 360 = \frac{5.(360)}{3} = \frac{1.800}{3} = \boldsymbol{600\ páginas}$$

Agora, que encontramos o total de páginas do livro, 600 páginas, precisamos responder à pergunta do problema: *qual o total de páginas que ainda faltam para Fábio ler o livro?*

Assim, diminuímos do total de páginas do livro a quantidade de páginas lidas, veja a seguir.

$$\text{Páginas não lidas} = \text{Páginas do livro} - \text{Páginas lidas}$$

$$\text{Páginas não lidas} = 600 - 360$$

$$\text{Páginas não lidas} = \boldsymbol{240\ páginas}$$

Portanto, ainda restam 240 páginas para Fábio ler do livro.

Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra

Considerando que Fábio está lendo um livro e não sabemos qual a quantidade de páginas, precisamos encontrar esse total para diminuirmos a soma de um quinto, no primeiro dia, e dois quintos, no segundo dia, que representam o total de páginas lidas por Fábio. Assim, podemos representar algebricamente pela seguinte expressão, veja:

$$\overbrace{\frac{1}{5}}^{1°\ dia}x + \overbrace{\frac{2}{5}}^{2°\ dia}x = 360$$

$$\frac{x + 2x}{5} = 360$$

$$3x = 1800$$

$$\boldsymbol{x = 600}$$

Portanto, descobrimos o total de páginas do livro, 600 páginas, agora precisamos diminuir as páginas lidas por Fábio, 360 páginas, para encontrarmos quantas páginas faltam para serem lidas, conforme:

$$Faltam\ para\ ler = Total\ de\ páginas\ do\ livro - total\ de\ páginas\ lidas$$

$$600 - 360 =$$

$$\mathbf{240\ páginas}$$

Sugestões para resposta:

a) Fábio ainda tem 240 páginas para ler o livro.
b) Restam 240 páginas para Fábio ler todo o livro.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF06MA09), (EF06MA10).**

Problema 3.3 – Fábrica de máscaras

Em uma fábrica de máscaras em Sinop-MT, tinha 750 unidades no estoque. Na segunda-feira foram confeccionadas 350 máscaras. Na terça-feira foram confeccionadas três vezes a quantidade da segunda-feira. Na quarta-feira foram doadas ao pronto socorro da cidade 1500 máscaras. Quantas máscaras restaram no estoque da fábrica?

Interpretação

Sujeitos: Estoque inicial e estoque final.

Dados numéricos:

750 unidades no estoque.

Na segunda-feira foram confeccionadas 350 máscaras.

Na terça-feira foram confeccionadas três vezes a quantidade da segunda-feira.

Na quarta-feira foram doadas ao pronto socorro da cidade 1500 máscaras.

Incógnita: Quantas máscaras restaram no estoque da fábrica?

Estratégia 01 - Modelando com as Barras

Para a modelagem deste problema, primeiramente é preciso saber qual o estoque inicial e, a partir dele adicionando a quantidade que foram confeccionadas de máscaras. Veja:

Portanto, temos um estoque inicial de 750, onde foram confeccionadas em dois dias mais 1400 máscaras, como foram doadas 1500, o estoque reduziu para um total de 650 máscaras.

Estratégia 02 - Aritmética

Consideramos que a fábrica tinha 750 máscaras no estoque e foram confeccionadas 350 mais três vezes essa quantidade, chegamos à quantidade de 2.150 máscaras e foram doadas 1500 unidades.

Diante disso, para encontrar o estoque final equacionaremos os dados da seguinte maneira, observe que, para este problema utilizamos as incógnitas *Ef* que correspondem ao Estoque Final. Assim, temos:

$$Ef + 1.500 = 2.150$$

$$Ef + 1.500 - 1.500 = 2.150 - 1.500$$

$$\boldsymbol{Ef = 650\ \text{Máscaras}}$$

Portanto, a partir do total de máscaras confeccionadas, 2.150 há uma diferença de 1.500, reduzindo ao estoque final de 650 máscaras.

Sugestões para resposta:

1) Restaram 650 máscaras no estoque da fábrica.

2) No estoque da fábrica restaram 650 máscaras.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF06MA03).**

Problema 3.4 – Livro de Edson

Edson leu um livro de literatura em 4 semanas. Na primeira semana leu 25% das páginas, na segunda leu 30%, na terceira 40% e na quarta leu 17 páginas. Qual o total de páginas do livro?

Sugestão:

Formas de Representação

$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$

15% → Percentual

$\frac{15}{100}$ → Fracionária

0,15 → Decimal

O que significa?

Por → ÷

cento → 100

$20\% = \frac{20}{100}$

Na execução deste problema, sugerimos que aborde diferentes estratégias que possam ser utilizadas, como também apresente formas e representações diversas relacionadas a porcentagem, a saber, forma percentual, fracionária, decimal, cortando os zeros, representações geométricas, do conteúdo de porcentagem para desenvolver a autonomia do estudante ao resolver problemas, por exemplo.

Por exemplo:

$\frac{30}{100}$ caixas estavam com laranjas. Onde 100 representa o **total** de caixas e 30 a **parte** que estava com laranjas.

Caro colega Professor(a), lembre-se, nem todos os alunos possuem a mesma mente matemática, alguns compreendem melhor utilizando representações e desenhos, outras equações. Por isso, é importante que o problema seja abordado com diferentes estratégias para que o alcance da sua aula seja maior.

Como converter Porcentagem, Fração e Decimais:

O **INTEIRO** é sempre **100%**, então:

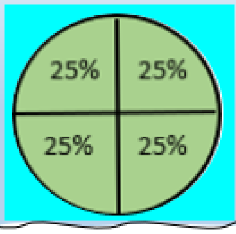
5% é o mesmo que $\frac{5}{100}$ ou 0,05

40% é o mesmo que $\frac{40}{100}$ ou 0,4

100% é o mesmo que $\frac{100}{100}$ ou 1,0

Representações Geométricas

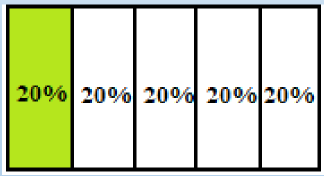
O Círculo representa um **todo** (100%) e foi dividido em **4 partes**, então, cada parte representa 25% do todo.



ou

Representações Geométricas

O Retângulo representa um **todo** (100%) e foi dividido em **5 partes**, cada parte representa 20% pintado do todo. Temos, 20% pintado e 80% sem pintar.



Este problema foi elaborado para ser trabalhado no 5º e 6º ano, do Ensino Fundamental, com situações problema, envolvendo porcentagem. Para melhor visualização inserimos representações geométricas, veja:

Interpretação

Sujeito: livro de Literatura

Dados numéricos:

Leu um livro em 4 semanas.

1ª semana leu 25% das páginas.

2ª semana leu 30%.

3ª semana leu 40%.

4ª semana leu 17 páginas.

Quantas páginas tinha o livro?

Orientações

Este problema explora **Porcentagem**, e o símbolo que a representa é **%.**

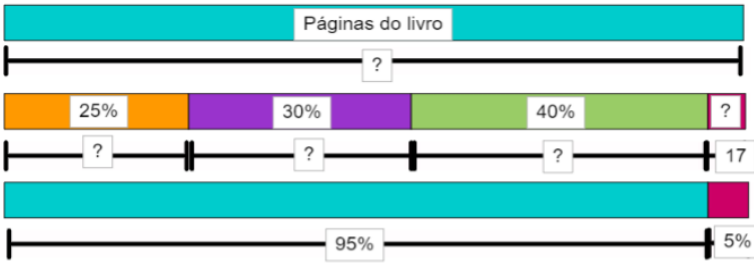
Definição

É uma representação de maneira prática do quanto de um **TODO** se está referenciando, em 100 unidades.

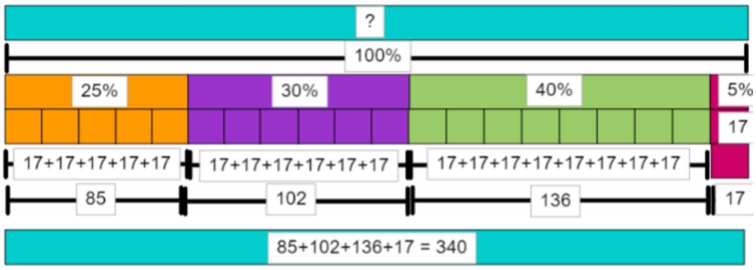
Estratégia 01 - Modelando com as Barras

A partir da modelagem com as barras, representamos as páginas do livro na primeira barra, depois de forma gradativa distribuímos a porcentagem de cada semana, 25% da primeira semana, 30% da segunda semana, 40% da quarta semana e 17 páginas da quarta semana.

A partir da soma das porcentagens temos 95% e o restante, 5% consideramos que são as 17 páginas, representado conforme as barras abaixo, veja:



Assim, a modelagem com as barras permite definir que a cada 5% temos 17 páginas, isto é, na primeira semana temos 25%, então temos o 17 cinco vezes, o mesmo na segunda semana, 30%, o 17 seis vezes, e na última semana, 40%, o 17 oito vezes.



Portanto, ao somarmos o valor de cada porcentagem temos o total de páginas do livro, o equivalente a 340 páginas.

Estratégia 02 - Aritmética

Para calcularmos aritmeticamente o problema, tomamos que:

Livro			
1ª semana	2ª semana	3ª semana	4ª semana
25%	30%	40%	5%
$\frac{25\%}{5\%}$ 5 x 17 **85**	$\frac{30\%}{5\%}$ 6 x 17 **102**	$\frac{40\%}{5\%}$ 8 x 17 **136**	17
85+102+136+17 = **340 páginas**			

Logo, temos o total de páginas de cada semana, agora, somamos todas e teremos o total de páginas do livro, portanto o livro tem 340 páginas.

Estratégia 03 – Iniciação à Álgebra

É possível representar algebricamente pela seguinte operação, utilizamos a incógnita ‘p’ para representar as páginas, veja:

$$17 = \frac{5}{100}p$$

$$p = \frac{1700}{5}$$

$$\boldsymbol{p = 340\ páginas}$$

Portanto, a incógnita ‘p’ equivale a 340 páginas.

Sugestões para resposta:

a) O total de páginas do livro é 340.

b) O livro que Edson leu tem 340 páginas, no total.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA11), (EF06MA13).**

Problema 3.5 – Cartas de Antônio e Marcos

Antônio e Marcos são amigos desde a infância. Os amigos gostam de colecionar cartas. Antônio tinha metade das cartas de Marcos. Depois que Antônio deu 36 cartas a Marcos, o amigo ficou com 3 vezes mais cartas que ele. Quantas cartas eles têm agora?

Interpretação

Sujeitos: Antônio e Marcos.

Dados numéricos:

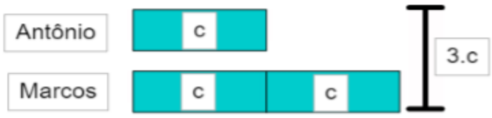
Não temos a quantidade de cartas de Antônio.

Não temos a quantidade de Cartas de Marcos.

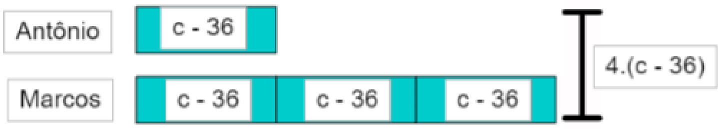
Incógnita: Quantas cartas eles têm agora?

Estratégia 01 - Modelando com as Barras

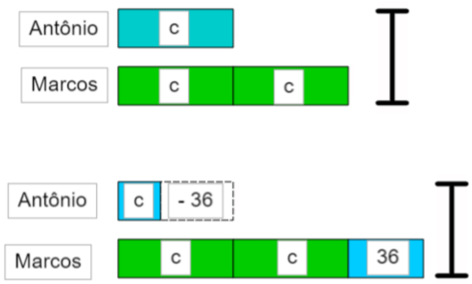
Neste problema, modelando a partir das barras, precisamos nos atentar que na primeira situação, temos que Antônio tem a metade de Marcos, representamos com a primeira barra. Assim, como não sabemos a quantidade de cartas colocamos a incógnita "c" que corresponde as cartas. Veja:



Para encontrarmos a quantidade de cartas dos amigos precisamos entender que Antônio deu 36 cartas, isto é, menos 36. Assim, cada parte corresponde a 'c' menos 36. Veja:



Esta modelação ajuda o aluno a compreender os dados referentes ao problema, por ter apenas um dado numérico. Contudo, podemos representar estes dados com outra modelação, observe:



Cartas de Marcos $= m$

$$m + 36 = 3.(\frac{m}{2} - 36)$$
$$m + 36 = \frac{3.m}{2} - 108$$
$$m + 36 = \frac{3.m - 216}{2}$$
$$2.m + 72 = 3.m - 216$$
$$2.m - 3.m + 72 - 72 = 3.m - 3.m - 216 - 72$$
$$(-1). - m = -288 . (-1)$$
$$\boldsymbol{m = 288\ cartas}$$

Cartas de Antônio = $\frac{m}{2}$

$$a = \frac{m}{2}$$
$$a = \frac{288}{2}$$

$$\boldsymbol{a = 144\ cartas}$$

Assim,

$$\text{Antônio} = c - 36$$
$$\text{Antônio} = 144 - 36$$
$$\textbf{Antônio} = \boldsymbol{108\ cartas}$$

$$Marcos = 3.(Antônio)$$
$$Marcos = 3.(108)$$
$$\boldsymbol{Marcos = 324\ cartas}$$

Logo, para sabermos a quantidade de cartas que Antônio e Marcos têm juntos, fazemos a seguinte soma:

$$\text{Total de cartas} = \text{Marcos} + Antônio$$

$$\text{Total de cartas} = 108 + 324$$

$$\textbf{Total de cartas de Antônio e Marcos} = \boldsymbol{432\ cartas.}$$

Portanto, Antônio e Marcos tem juntos um total de 432 cartas.

Estratégia 02 - Iniciação à Álgebra

Para encontrarmos a quantidade de cartas que Antônio e Marcos têm juntos será preciso, por uma incógnita às cartas, pois não sabemos a quantidade de nenhum dos sujeitos. Veja:

$$4.(c - 36) = 3.c$$
$$4.c - 144 = 3.c$$
$$4.c - 3.c = 144$$
$$\boldsymbol{c = 144\ cartas}$$

Como juntos eles têm 3.c, logo a quantidade de cartas é:

$$\text{Total de cartas de Antônio e Marcos} = 3.(144)$$

$$\textbf{Total de cartas de Antônio e Marcos} = \mathbf{432}\ \boldsymbol{cartas}$$

Estratégia 03 - Álgebra

Este problema pode ser resolvido por meio de estratégias algébricas, em que utilizamos incógnitas para encontrarmos a quantidade de cartas que Antônio e Marcos. Para isso, foi desenvolvida uma equação algébrica para encontrarmos o total de cartas, conforme a representação algébrica abaixo, veja:

$$3.(c-36) = 2.c + 36$$
$$3.c - 108 = 2.c + 36$$
$$3.c - 2.c - 108 + 108 = 2.c + 36 - 2.c + 108$$
$$c = 36 + 108$$
$$c = 144$$

Como Antônio tem 36 cartas a menos do que Marcos, substituímos, isto é, $c - 36$, então, o total de cartas menos os 36 corresponde:

$$\text{Antônio} = c - 36$$

$$\text{Antônio} = 144 - 36$$

$$\text{Antônio} = 108 \text{ cartas}$$

Já Marcos tem 36 cartas a mais do que Antônio, para saber o total de cartas é preciso substituir o valor de c na expressão $2.c + 36$, assim:

$$\text{Marcos} = 2.c + 36$$

$$\text{Marcos} = 2.(144) + 36$$

$$\text{Marcos} = 288 + 36$$

$$\text{Marcos} = 324\ cartas$$

Assim, para encontrarmos o total de cartas de Antônio e Marcos é preciso somar as quantidades que cada um tem, observe:

$$\text{Total de cartas} = \text{Marcos} + Antônio$$

$$\text{Total de cartas} = 108 + 324$$

$$\text{Total de cartas} = 432$$

Portanto, o total de cartas é o resultado da soma da quantidade das cartas de Antônio e da quantidade de cartas de Marcos, logo, o total é 432 cartas.

Sugestões para resposta:

1) Eles têm 432 cartas agora.
2) Antônio e Marcos têm 432 cartas.

Habilidades - BNCC

HABILIDADES BNCC	**(EF04MA03), (EF04MA04), (EF04MA05), (EF04MA08), (EF05MA08), (EF05MA11), (EF05MA13), (EF06MA09).**

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As experiências e as reflexões oriundas do presente trabalho nos mostram que seu conteúdo constitui como algo inovador, convidativo, prático, dinâmico e esclarecedor.

Mostra-se inovador, pois apresenta um recurso ainda insipiente no ensino e aprendizagem no segundo ciclo na cidade de Sinop (MT) e região, qual seja, o Modelo de Barras.

Caracteriza-se como convidativo para o professor que ensina matemática, apresentando subsídios para melhorar e aprimorar do repertório docente.

Prático, uma vez que o docente poderá aplicar o recurso Modelo de Barras em sala de aula.

Dinâmico, sendo que o recurso Modelo de Barras associa outras estratégias pedagógica, como a abordagem concreto – pictórico – abstrato.

Esclarecedor, enaltecendo explicações pertinentes aos tipos de problemas, parte-todo, comparação e antes-depois.

Acreditamos ser oportuno enfatizar que o recurso Modelo de Barras serve como disparador de estratégias pedagógicas, sistematizando o modo de ensinar e de aprender matemática.

A realização da pesquisa e a elaboração do presente livro intercambiam e mostram, como parte de um processo de formação docente, proporcionando à professora-mestranda, consciência de sua experiência profissional, das possibilidades e dificuldades de sua prática, um caminho profícuo de fortalecimento de seu desenvolvimento profissional, uma das metas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática - PPGECM.

Os recursos educativos têm se constituído como um acervo elaborado pelos próprios profissionais, e que possibilita, à Educação Básica, um apoio diante de seus múltiplos desafios. Sua divulgação, nos devidos moldes, para que seja disponibilizado aos professores, requer vínculos contínuos entre Universidade e Escola Básica, o que só enriquece os propósitos formativos das duas Instituições.

Com este estudo, esperamos contribuir com as reflexões que a área realiza quanto às especificidades do Mestrado Profissional, pelas metodologias que utiliza e pelos seus objetivos, necessariamente articulando pesquisa e elaboração de produto educacional. A experiência e estudo, os desdobramentos das orientações, se mostram como desafios na Universidade.

Sugerimos que este livro seja utilizado para realização de atividades dentro e fora da sala de aula. Esperamos, com sua ajuda, fazer deste objeto de estudo do aluno, levando-o ao interesse de participar ativamente das aulas.

Somando esforços, este material será o primeiro de muitos e, com certeza, poderá ser uma importante ferramenta para fortalecer sua prática em sala de aula. Assim, nós o convidamos para juntos, buscarmos o aperfeiçoamento de ações educacionais, com vistas à melhoria dos nossos indicadores, proporcionando uma educação justa e de qualidade.

A proposta deste trabalho é de movimentação e a sua participação, professor, neste movimento é importante para a continuidade da pesquisa, do ensino e das diferentes estratégias na resolução de problemas perpassando o concreto, o pictórico e o abstrato.

Saber ensinar implica em economizar tempo e alcançar boa parte do espectro da sala de aula; implica ao professor em atender e acompanhar individualmente o aluno; implica em não aceitar o conhecimento matemático como um produto acabado; enfim, implica em uma maior produtividade no ensino e na aprendizagem.

Desde já, agradecemos a atenção, carinho e contribuições!

BIBLIOGRAFIA

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

CABRAL, J. **O Método Kumon versus método de Singapura no ensino da Matemática**. Artigo de Doutorado em Matemática pela Universidade dos Açores, Portugal, 2015.

DA SILVA, Mirian Ramos; ANDRADE, Mirian Maria. As contribuições das Tecnologias de Informação e Comunicação para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática na Educação Básica: um estudo a partir de trabalhos disponíveis no CREMM. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 9, p. 146-163, 2014.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas Em Aritmética E Álgebra** P/O Séc. XXI. Papirus Editora, 1997.

MATH PLAYGROUND. Site em Inglês. Disponível em https://www.mathplayground.com/thinking_blocks_modeling_tool/index.html. Último acesso 02 de mar. de 2021.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Tradução Heitor Lisboa de Araújo. 2ª Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SANTOS, J. C. M. Conceituação, manipulação e aplicação de frações pelo método de Singapura. **Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019. Disponível em:** https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7680671. Acesso em: 09 jul. 2020.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

1. Em um sítio há 1200 aves, metade das aves são galinhas, 1/3 são Perus e o restante são patos. Quantas aves existem entre galinhas e patos?

2. Dois quintos dos peixes em um grande aquário são peixes dourados. Há 6 pintados a mais do que peixes dourados no aquário. Os 12 peixes restantes são tucunarés. Quantos peixes existem no aquário?

3. Júlia plantou 1/4 de sua horta com cenouras, 1/5 com tomates e o restante com beterrabas. Que parte da horta foi plantada com beterrabas?

4. Andreia tinha alguns reais em sua carteira. Antes de ir ao supermercado, sua mãe lhe deu 184 reais. Chegando lá, Andreia percebeu que perdera 69 reais no caminho, ficando com 181 reais ao todo. Quantos reais Andreia tinha inicialmente em sua carteira?

5. Mariana gastou 3/4 de suas economias em um presente para sua mãe e lhe sobraram R$ 250,00. Quanto dinheiro Mariana havia economizado?

6. Na Pastelaria Sinop são feitos 385 pastéis por dia. Quantos pastéis serão produzidos em 7 dias?

7. No 6º ano há 18 alunos a menos do que no 5º ano. No 5º ano há 15 alunos a mais do que no 4º ano. No 4º ano há 48 alunos. Quantos alunos há no 6º ano?

8. Na casa de Marcelo estão trocando os azulejos da cozinha. Será preciso 3 caixas de azulejos brancos e 5 caixas de azulejos pretos. Cada caixa vem com 10 azulejos. Quantos azulejos pretos necessitam a mais que os brancos?

9. Nove torneiras abertas durante 40 horas consumiram 200 litros de água. Quantos litros de água doze torneiras consomem durante 6 horas?

10. Alice tem o dobro do dinheiro de Lucas. Os dois juntos têm R$ 300,00. Quanto dinheiro Lucas tem? Quanto dinheiro Alice tem?

11. Stela e Cláudia estão fazendo abdominais. Cláudia fez 17 abdominais a menos do que Stela. Sendo que Stela fez 69 abdominais. Quantas abdominais Cláudia fez?

12. Uma ovelha pesa 87 kg. Um leão pesa 96 kg a mais do que a ovelha. Uma zebra pesa 141 kg a mais do que o leão. Quanto pesa a zebra?

13. Uma papelaria tinha um estoque de 1700 mochilas e não conseguia vendê-las. Então, o dono resolveu abaixar o preço. Na manhã deste dia, vendeu 382 mochilas. A notícia se espalhou e à tarde ele vendeu 790. Quantas mochilas sobraram no estoque?

14. Em uma loja de tecidos tinha em janeiro de 2017 um estoque de 5300 metros de certo tecido a cada mês o estoque diminuiu exatamente 300 metros. Em que mês e ano o estoque era igual a 1400 metros? Em que mês e ano acabou todo estoque? Se cada metro é vendido

a R$25,00 determine o faturamento obtido cm a venda deste tecido no mês de julho de 2017.

15. Sara tinha R$ 54,00 e doou 2/3 do dinheiro que tinha para um mendigo. Quanto dinheiro Sara doou?

16. Mariana gastou 3/4 de suas economias em um presente para sua mãe e lhe sobraram R$ 250,00. Quanto dinheiro Mariana havia economizado?

17. Luíza tem um álbum com 1200 figurinhas. Se ela quiser dar 220 figurinhas à sua irmã e 350 à sua prima, quantas figurinhas restarão à Luíza?

18. A bengala do meu avô tem 130 centímetros de comprimento, como ele vai deixar para meu pai que é mais baixo precisará cortar 85 centímetros. Depois de cortar, qual será o comprimento da bengala?

19. Na festa de aniversário de João seu pai o presenteou com R$ 180,00 e mãe com R$ 140,00. Com esse dinheiro, ele comprou três tênis do mesmo valor, mas com cores diferentes. Qual o valor de cada um deles?

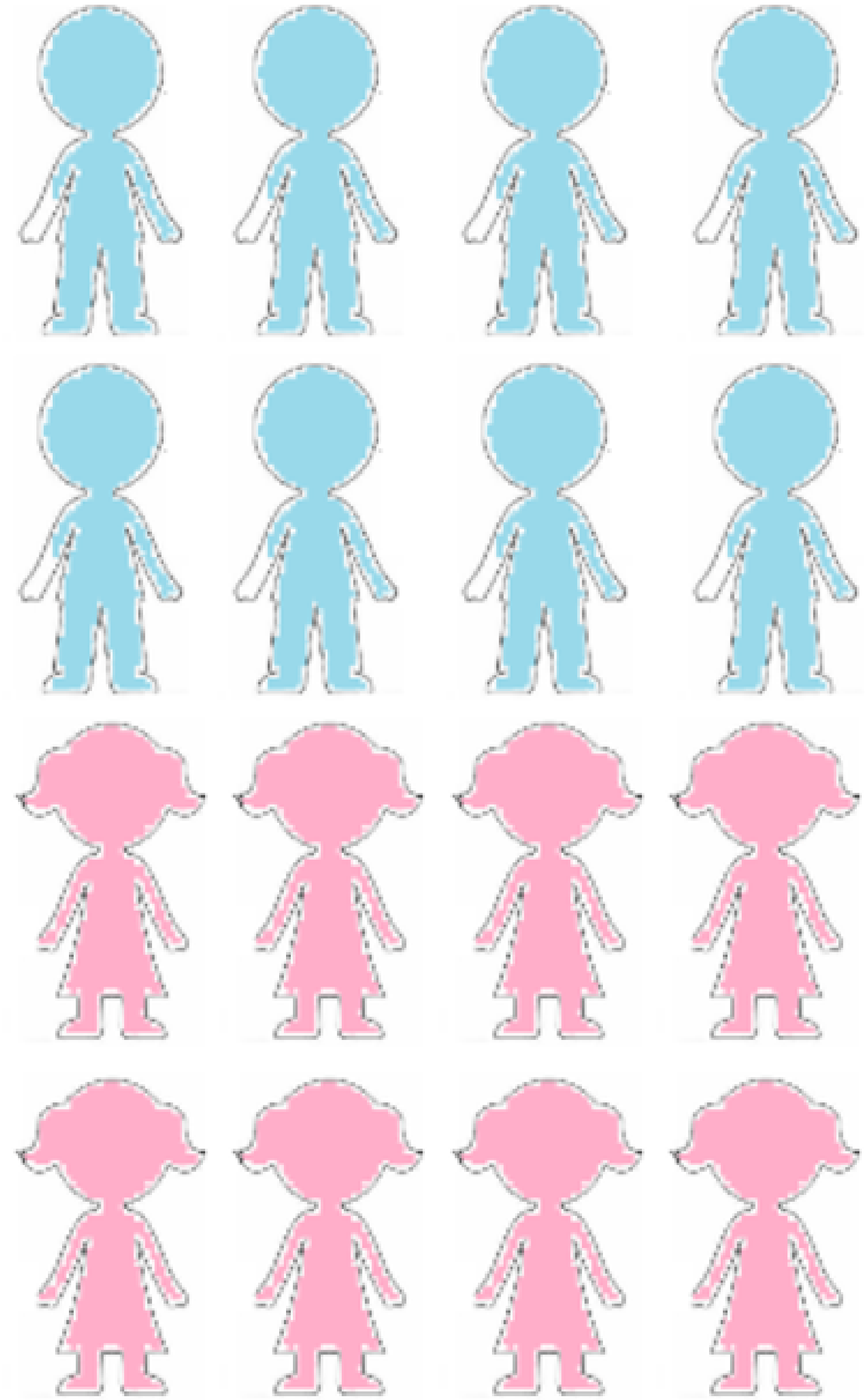
20. Do total das páginas de um livro Fábio leu 1/5 no primeiro dia e metade do restante no segundo dia, num total de 360 páginas lidas nos dois dias. Nessas condições, qual o total de páginas que ainda faltam para Fábio ler o livro?

FICHA DE AVALIAÇÃO

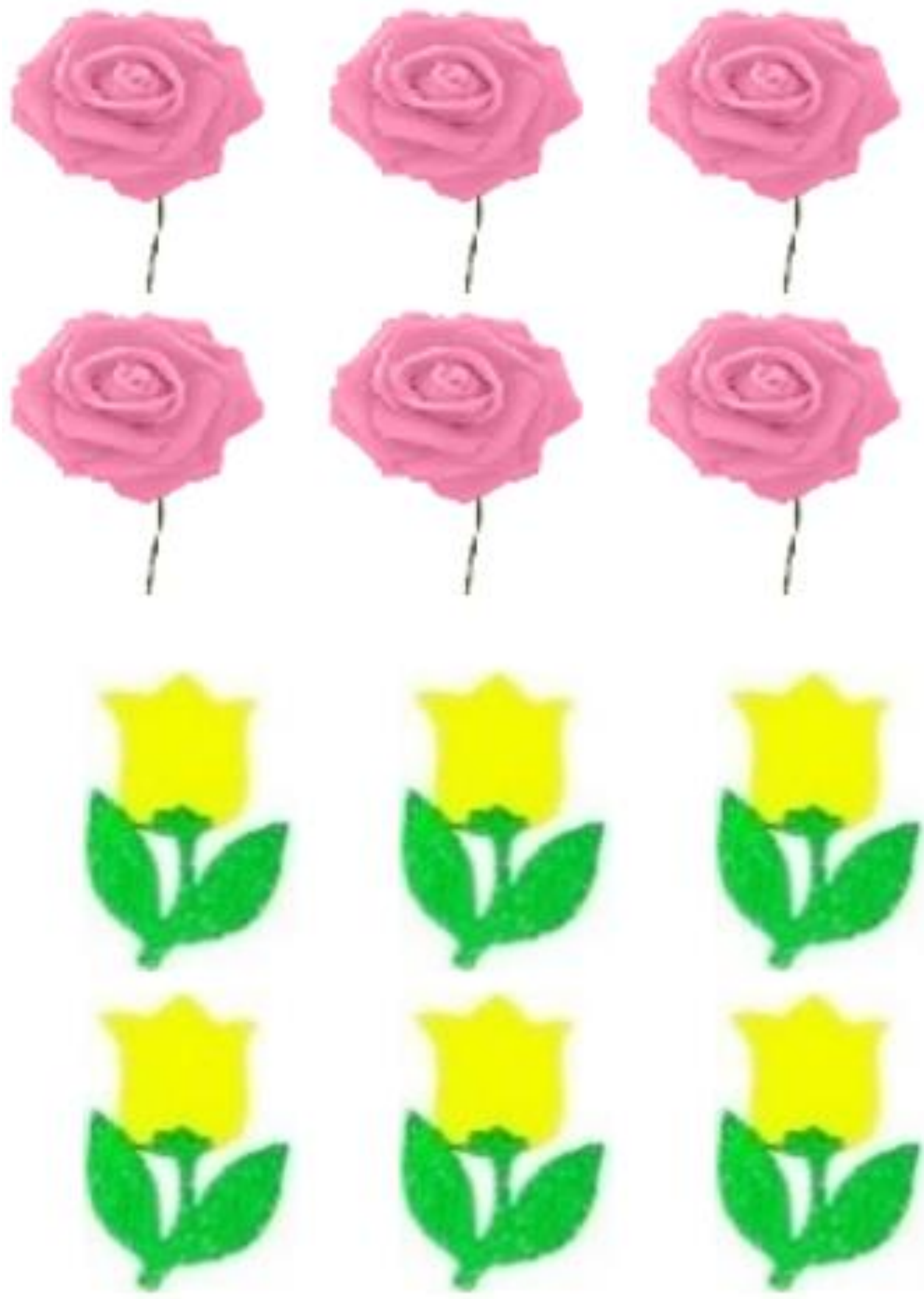
ETAPA	Habilidade	SIM	EM PARTE	NÃO	OBSERVAÇÃO
1ª Etapa[1]	Registrou os dados essenciais corretamente				
	Identificou o que precisa ser calculado				
2ª Etapa[2]	Representou corretamente um Modelo de Barras usando seus dados				
	Equacionou corretamente usando ou não Modelo de Barras, com seus dados				
3ª Etapa[3]	Resolveu sem erros a equação que considerou				
4ª Etapa[4]	Confirmou a resposta na equação				
	Interpretou a reposta dentro do enunciado do problema				

[1] Leitura e Compreensão dos dados
[2] Estratégia e Modelagem do problema
[3] Execução da estratégia
[4] Revisão

ENCARTES PARA RECORTAR - Bonequinhos



ENCARTES PARA RECORTAR – Rosas e Tulipas



ENCARTES PARA RECORTAR – Peixes












ENCARTES PARA RECORTAR - Codornas e Coelhos












SOBRE A AUTORA

Sou **Stela Maris Ferrari Streit.** Nasci em Portelândia – Goiás em 1990. Iniciei e conclui meus estudos da Educação Básica em escola pública. Desde pequena sou apaixonada pela Matemática. Tanto que acabei por fazer licenciatura e mestrado nesta área. Tenho experiência na área da matemática escolar na Educação Básica. Atuo como professora há 8 anos e no momento exerço docência em redes de ensino privado, escola e faculdade em Sinop – Mato Grosso. Minha linha de pesquisa é no ensino de Matemática, em especial, na formação de professores.

Stela Maris Ferrari Streit. Orcid: https://orcid.org/0000-0003-2303-6375. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7554220020859562. Licenciada (2015) em Pedagogia pelo Instituto Superior Albert Einstein – ISALBE. Mestranda do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da natureza e Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) campus universitário de Sinop. Professora do Colégio Marista Santo Antônio. Sinop, mato Grosso, Brasil, e-mail: stela_mfs@outlook.com.

SOBRE SEU ORIENTADOR

Este ao meu lado **DIREITO** é meu querido orientador, Professor **Dr. Edson Pereira Barbosa.** Um grande professor, seu carisma me motivou a encarar o desafio da pesquisa na Pós-Graduação. Obrigada sempre professor por ser um incentivador e por ter contribuído na minha vida profissional. Descrevo-o pouco aqui, porque as palavras de gratidão não cabem em uma página.

Edson Pereira Barbosa. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-5418-009X . Lattes: http://lattes.cnpq. br/3184651096945519 . Licenciado em Matemática (UNEMAT), Especialista em Matemática (UNICAMP), Mestre em Educação (UFMT) e Doutor em Educação Matemática (UNESP/ Rio Claro). Professor da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), do Instituto de Ciências Naturais Humanas e Sociais (ICNHS), no Curso de Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática e no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências da Natureza e Matemática (PPGECM) com pesquisas nas áreas de Educação Matemática e Formação de Professores. Sinop, Mato Grosso, Brasil. E-mail: edsonpbmt@gmail.com.